

Академік НАН України **Ю. О. Митропольський, Г. П. Хома,
С. Г. Хома-Могильська**

Розв'язки крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку

We obtained the conditions of solvability of a boundary-value inhomogeneous periodic problem for particular values of the period ω on the base of a solution of the boundary-value periodic problem $u_{tt} - u_{xx} = g(x, t)$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t + \omega) = u(x, t)$. This solution is represented with the formula $u(x, t) = u^0(x, t) + \tilde{u}(x, t)$. Here, $u^0(x, t)$ is the solution corresponding to the homogeneous periodic problem and $\tilde{u}(x, t)$ is a partial solution of the inhomogeneous equation where $\tilde{u}(x, t + \omega) = \tilde{u}(x, t)$. We demonstrate that the obtained solution contains the results that were found before.

При розв'язанні крайових задач для рівнянь у частинних похідних, як зазначалося в статті [1], першочерговими є питання про встановлення умов їх розв'язності та існування єдиного розв'язку вказаних задач. У даній роботі ми досліджуємо умови розв'язності крайової періодичної задачі $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t + \omega) = u(x, t)$ для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку $u_{tt} - u_{xx} = g(x, t)$, розглядаючи випадки $\omega = \pi$ та $\omega = 4\pi$.

π -періодичні розв'язки крайової періодичної задачі. Припустимо, що

$$\omega = \frac{2s-1}{2m-1}\pi, \quad s, m \in \mathbb{N}, \quad (2s-1, 2m-1) = 1.$$

Тоді

$$\nu_k = \frac{2\pi k}{\omega} = \frac{2(2m-1)}{2s-1}k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо найпростіший випадок $m = s = 1$. При цьому система (18) роботи [1]

$$\begin{aligned} B + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^1 \cos \nu_k t + A_k^3 \sin \nu_k t) + \tilde{u}(0, t) &= 0, \\ A\pi + B + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^1 \cos \nu_k \pi + A_k^2 \sin \nu_k \pi) \cos \nu_k t + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^3 \cos \nu_k \pi + A_k^4 \sin \nu_k \pi) \sin \nu_k t + \tilde{u}(\pi, t) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

розв'язності лінійної неоднорідної крайової ω -періодичної задачі

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, t + \omega) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

для $\nu_k = 2k$, $\omega = \pi$, набуває вигляду

$$\begin{aligned} B + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^1 \cos 2kt + A_k^3 \sin 2kt) + \tilde{u}(0, t) &= 0, \\ A\pi + B + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^1 \cos 2kt + A_k^3 \sin 2kt) + \tilde{u}(\pi, t) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Очевидно, система (4) при $\tilde{u}(0, t) = \tilde{u}(\pi, t) = \text{const}$ для всіх $t \in \mathbb{R}$ завжди має єдиний розв'язок

$$B = -\tilde{u}(0, t), \quad A = 0, \quad A_k^1 = A_k^3 = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Вважатимемо знову, що $\tilde{u}(x, t) = (Sg)(x, t)$, де

$$(Sg)(x, t) = -\frac{1}{4} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_x^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi, \tau) d\tau. \quad (5)$$

Справедливі твердження.

Лема 1. Якщо $g \in C_\pi \cap A_1 = \{g: g(x, t) = g(\pi - x, t) = g(x, t + \pi)\}$, то $g \in A_2 = \{g: g(x, t) = g(\pi - x, t + \pi) = g(x, t + 2\pi)\}$.

Зауважимо, що властивості класу функцій A_2 детально вивчені в [1].

Лема 2. Якщо $g \in C_\pi \cap A_1$, то

$$(Sg)(0, t) = (Sg)(\pi, t) = \text{const}. \quad (6)$$

Доведення. Те, що $(Sg)(0, t) = \text{const}$ і $(Sg)(\pi, t) = \text{const}$, випливає з леми 2 роботи [1], оскільки $A_1 \subset A_2$. Нехай $g \in A_1$. Тоді

$$\begin{aligned} (Sg)(\pi, t) &= -\frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau = -\frac{1}{4} \int_0^\pi d\eta \int_{t-\eta}^{t+\eta} g(\pi - \eta, \tau) d\tau = \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^\pi d\eta \int_{t-\eta}^{t+\eta} g(\eta, \tau) d\tau \equiv (Sg)(0, t), \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Отже, покладаючи $\tilde{u}(x, t) = (Sg)(x, t)$, у випадку $\omega = \pi$ на основі лем 1 і 2 даної роботи та теореми 1 роботи [1] ми отримуємо такий відомий результат.

Теорема 1 [2]. Якщо $g \in G_{\pi t} \cap A_1$, то функція $u = R_1 g$, яка визначена формулою

$$u(x, t) = (R_1 g)(x, t) \equiv (Sg)(x, t) + \frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi, \tau) d\tau, \quad (7)$$

є єдиною функцією з класу $C_{\pi}^{2,2} \cap A_1$, яка задовольняє умови крайової періодичної задачі (2), (3) при $\omega = \pi$. Крім цього, $R_1 \in L(C_{\pi} \cap A_1, C_{\pi}^{1,1} \cap A_1)$, $R_1 \in L(G_{\pi t} \cap A_1, C_{\pi}^{2,2} \cap A_1)$.

Зауваження 1. Система (4) розв'язності крайової $\omega = \pi$ -періодичної задачі (2), (3) завжди має тривіальний розв'язок, якщо $\tilde{u}(0, t) = \tilde{u}(\pi, t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Справедливі твердження.

Лема 3. Якщо $g \in C_{\pi} \cap A_2^- = \{g: g(x, t) = g(\pi - x, t + \pi) = g(x, t + 2\pi) = -g(x, -t)\}$, то $\tilde{u}(0, t) \equiv (Sg)(0, t) = 0$ і $\tilde{u}(\pi, t) \equiv (Sg)(\pi, t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Доведення. Оскільки при $g \in C_{\pi} \cap A_2^-$

$$(Sg)(0, 0) = -\frac{1}{4} \int_0^{\pi} d\xi \int_{-\xi}^{\xi} g(\xi, \tau) \equiv 0;$$

$$(Sg)(\pi, 0) = -\frac{1}{4} \int_0^{\pi} d\xi \int_{-\pi+\xi}^{\pi-\xi} g(\xi, \tau) = -\frac{1}{4} \int_0^{\pi} d\xi \int_{-(\pi-\xi)}^{\pi-\xi} g(\xi, \tau) \equiv 0,$$

то на основі леми 2 маємо $(Sg)(0, t) = (Sg)(\pi, t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, що й потрібно було довести.

Теорема 2. Якщо $g \in G_{\pi t} \cap A_k^-$, $k = 1, 2$, то функція

$$u(x, t) = (Sg)(x, t) \tag{8}$$

є єдиною функцією з класу $C_{\pi}^{2,2} \cap A_k^-$, $k = 1, 2$, яка задовольняє умови крайової періодичної задачі (2), (3) при $\omega = k\pi$, $k = 1, 2$.

4 π -періодичні розв'язки крайової періодичної задачі. Припустимо, що

$$\omega = \frac{2\pi p}{2s-1}, \quad p = 2m, \quad m, s \in \mathbb{N}, \quad (p, 2s-1) = 1.$$

Тоді

$$\nu_k = \frac{2\pi k}{\omega} = \frac{2s-1}{2m} k.$$

Розглянемо знову частковий випадок $s = m = 1$, тобто, коли $\omega = 4\pi$. У цьому випадку $\nu_k = k/2$, $k \in \mathbb{N}$ і система (1) розв'язності крайової $\omega = 4\pi$ -періодичної задачі (2), (3) набуває вигляду

$$\begin{aligned} B + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k^1 \cos \frac{kt}{2} + A_k^3 \sin \frac{kt}{2} \right) + \tilde{u}(0, t) &= 0, \\ A\pi + B + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k^1 \cos \frac{k\pi}{2} + A_k^2 \sin \frac{k\pi}{2} \right) \cos \frac{kt}{2} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k^3 \cos \frac{k\pi}{2} + A_k^4 \sin \frac{k\pi}{2} \right) \sin \frac{kt}{2} + \tilde{u}(\pi, t) &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Припустимо, що значення $\tilde{u}(0, t)$ частинного розв'язку неоднорідного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = g(x, t)$ тотожно дорівнює нулеві, тобто $\tilde{u}(0, t) \equiv 0$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Тоді перше рівняння системи (9) має єдиний нульовий розв'язок

$$B = 0, \quad A_k^1 = A_k^3 = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Підставляючи розв'язок (10) у друге рівняння системи (9), одержуємо таку рівність:

$$A\pi + B + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k^2 \sin \frac{k\pi}{2} \cos \frac{kt}{2} + A_k^4 \sin \frac{k\pi}{2} \sin \frac{kt}{2} \right) + \tilde{u}(\pi, t) = 0. \quad (11)$$

Припустимо, що при $\tilde{u}(\pi, t) \neq \text{const}$ рівняння (11) має єдиний ненульовий розв'язок. Тоді згідно з формулою (17) [1] розв'язок крайової періодичної задачі (1), (2) при $\omega = 4\pi$ запишеться так:

$$u(x, t) = Ax + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k^2 \cos \frac{kt}{2} + A_k^4 \sin \frac{kt}{2} \right) \sin \frac{kx}{2} + \tilde{u}(x, t) \equiv u^0(x, t) + \tilde{u}(x, t), \quad (12)$$

де $u^0(x, t)$ — розв'язок однорідного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = 0$, а $\tilde{u}(x, t)$ — неоднорідного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = g(x, t)$ і такий, що $\tilde{u}(0, t) = 0$ і $\tilde{u}(\pi, t) \neq \text{const}$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Вкажемо клас функцій, для якого існує точний розв'язок крайової періодичної задачі (1), (2) при $\omega = 4\pi$. Для цього доведемо, що при умові, коли невідома 4π -періодична функція $\mu(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$ допускає розклад у рівномірно збіжний ряд Фур'є вигляду

$$\mu(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{kt}{2} + b_k \sin \frac{kt}{2} \right), \quad (13)$$

розв'язок

$$u^0(x, t) = Ax + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k^2 \cos \frac{kt}{2} + A_k^4 \sin \frac{kt}{2} \right) \sin \frac{kx}{2} \quad (14)$$

однорідного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = 0$, що входить у формулу (12), може бути зображений у вигляді

$$u^0(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha. \quad (15)$$

Справді, підставляючи (13) у формулу (15), знаходимо

$$\begin{aligned} u^0(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\alpha}{2} + b_k \sin \frac{k\alpha}{2} \right) \right\} d\alpha = \\ &= \frac{a_0}{2} x + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2a_k}{k} \sin \frac{k\alpha}{2} \Big|_{t-x}^{t+x} - \frac{2b_k}{k} \cos \frac{k\alpha}{2} \Big|_{t-x}^{t+x} \right\} = \\ &= \frac{a_0}{2} x + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2a_k}{k} \left(\sin \frac{k}{2}(t+x) - \sin \frac{k}{2}(t-x) \right) - \frac{2b_k}{k} \left(\cos \frac{k}{2}(t+x) - \cos \frac{k}{2}(t-x) \right) \right\} = \\ &= \frac{a_0}{2} x + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2a_k}{k} \cos \frac{kt}{2} + \frac{2b_k}{k} \sin \frac{kt}{2} \right\} \sin \frac{kx}{2}. \end{aligned}$$

Таким чином, покладаючи в останній рівності

$$\frac{a_0}{2} = A, \quad \frac{2a_k}{k} = A_k^2, \quad \frac{2b_k}{k} = A_k^4, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (16)$$

і враховуючи позначення $u^0(x, t)$ у формулах (14) і (15), одержуємо при нашому припущенні (16), що $u^0(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha$, що й потрібно було довести. Отже, у випадку $\omega = 4\pi$ розв'язок крайової періодичної задачі (2), (3) має вигляд

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha + \tilde{u}(x, t), \quad (17)$$

де $\mu(t)$ — невідома неперервно диференційована і 4π — періодична функція, а $\tilde{u}(x, t)$ — частинний розв'язок крайової $\omega = 4\pi$ -періодичної задачі (2), (3) такий, що $\tilde{u}(0, t) \equiv 0$, $\tilde{u}(\pi, t) \not\equiv \text{const}$, для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Якщо вважати, що

$$\tilde{u}(x, t) = (S_1 g)(x, t) \equiv -\frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau \quad (18)$$

і припустити, що $g \in G_{\pi t}$, $g(x, t + 4\pi) = g(x, t)$, $\mu \in C_\pi^1(\mathbb{R})$, $\mu(t + 4\pi) = \mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$, то функція

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha + (S_1 g)(x, t) \quad (19)$$

є єдиним класичним розв'язком $\omega = 4\pi$ -періодичної задачі (2), (3), причому $u(0, t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Покажемо, що існує клас функцій $\mu(t)$, для яких виконується друга крайова умова

$$u(\pi, t) \equiv \frac{1}{2} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha - \frac{1}{2} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau = 0. \quad (20)$$

Диференціюючи рівність (20), маємо

$$\mu(t + \pi) - \mu(t - \pi) = \int_0^\pi \{g(\xi, t + \pi - \xi) - g(\xi, t - \pi + \xi)\} d\xi. \quad (21)$$

Позначимо через $A_{4\pi}$ такий клас функцій:

$$A_{4\pi} := \{g: g(x, t) = -g(x, t + 2\pi)\}.$$

Лема 4. Якщо $g \in C_\pi \cap A_{4\pi}$, то $g \in Q_{4\pi}$.

Доведення. Справді, $g(x, t + 4\pi) = g(x, t + 2\pi + 2\pi) = -g(x, t + 2\pi) = g(x, t)$, що й потрібно було довести.

Замінюючи у рівності (21) t на $t + \pi$ і припускаючи, що $\mu(t) \in A_{4\pi}$ і $g \in A_{4\pi}$, знаходимо

$$\mu(t) = \frac{1}{2} \int_0^\pi (g(\xi, t - \xi) + g(\xi, t + \xi)) d\xi. \quad (22)$$

Отже, ми показали, що для кожної функції $g \in A_{4\pi}$ існує функція $\mu(t)$, яка належить класу $A_{4\pi}$. У результаті підстановки її у формулу (19) одержуємо в класі функцій $A_{4\pi}$ такий точний розв'язок:

$$u(x, t) = \frac{1}{4} \int_{t-x}^{t+x} d\alpha \int_0^\pi (g(\xi, \alpha - \xi) + g(\xi, \alpha + \xi)) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau \quad (23)$$

крайової періодичної задачі (2), (3) при $\omega = 4\pi$.

Перетворюючи (23), знаходимо

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-x}^{t+x} (g(\xi, \alpha - \xi) + g(\xi, \alpha + \xi)) d\alpha - \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-x-\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau + \frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x+\xi} g(\xi, \tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-x-\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau + \frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x+\xi} g(\xi, \tau) d\tau + \frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x+\xi} g(\xi, \tau) d\tau - \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-x-\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-x-\xi}^{t+x+\xi} g(\xi, \tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi, \tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau \equiv \\ &\equiv (Sg)(x, t) + \frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-x-\xi}^{t+x+\xi} g(\xi, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (24)$$

Теорема 3 [3]. Якщо $g \in G_{\pi t} \cap A_{4\pi}$, то функція

$$u(x, t) = (R_{4\pi})(x, t) \equiv (Sg)(x, t) + \frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-x-\xi}^{t+x+\xi} g(\xi, \tau) d\tau \quad (25)$$

є єдиною функцією з класу $C_{\pi}^{2,2} \cap A_{4\pi}$, яка задовольняє умови крайової періодичної задачі (2), (3) при $\omega = 4\pi$.

Таким чином, на основі умови розв'язності (18) роботи [1] досліджено і доведено існування π -періодичних і 4π -періодичних розв'язків крайової ω -періодичної задачі.

1. Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г. Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. I // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 7. – С. 912–921.
2. Митропольський Ю. О., Хома Н. Г. Періодичні розв'язки квазілінійних гіперболічних рівнянь другого порядку // Там же. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1370–1375.
3. Домбровський І. В. Існування гладкого розв'язку квазілінійного гіперболічного рівняння другого порядку // Наук. вісті НГУУ “КПП”. – 2000. – № 6 (14). – С. 136–141.

Інститут математики НАН України, Київ
Тернопільський національний економічний університет

Надійшло до редакції 11.09.2007

УДК 517.95

© 2008

Г. А. Снітко

Розв'язність оберненої задачі для параболічного рівняння з невідомим молодшим коефіцієнтом в області з вільною межею

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Б. Й. Пташником)

We established the conditions of existence and uniqueness of a solution to the inverse problem for a one-dimensional parabolic equation with unknown time dependent minor coefficient in a domain with free boundary.

У роботі досліджено обернену задачу визначення залежного від часу коефіцієнта при невідомій функції в параболічному рівнянні другого порядку загального вигляду в області з вільною межею. Зазначимо, що в праці [1] встановлено умови однозначного визначення залежних від часу коефіцієнтів $a(t)$, $q(t)$ у параболічному рівнянні

$$u_t = a(t)u_{xx} + q(t)u + f(x, t), \quad (x, t) \in (0, h) \times (0, T).$$

У [2] розглянуто задачу визначення $q(t)$ у рівнянні, коли старший коефіцієнт відомий, $a(t) = 1$, а додаткова умова має вигляд

$$\int_0^{s(t)} u(x, t) dx = E(t), \quad t \in [0, T], \quad 0 < s(t) \leq h.$$

Задача з вільною межею з інтегральною умовою перевизначення досліджена в [3].

В області $\Omega_T = \{(x, t): 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$ з невідомою межею $x = h(t)$ розглядаємо параболічне рівняння з невідомим коефіцієнтом $c = c(t)$

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(t)u + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$