

МЕТОД І АЛГОРИТМИ АНАЛІЗУ ПЛОСКИХ СИМЕТРИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ У РАСТРОВІЙ ФОРМІ

© Березький О., 2010

Запропоновано метод і алгоритми аналізу симетричних зображень у растровій формі. Наведено результати аналізу симетричних зображень-орнаментів.

Ключові слова: аналіз, симетричні зображення, алгоритми, метод, зображення-орнамент.

The method and algorithms analysis of symmetric images in a raster form are suggested in the article. The results of analysis of symmetric image-ornaments are described.

Keywords: analysis, symmetric images, algorithms, method, image-ornaments.

Вступ

Ідея симетрії виникла ще у Древній Греції при розвиненні філософами і математиками вчення про гармонію світу. Древні живописці, зодчі, скульптори створювали свої твори за канонами гармонії. Ідеологія гармонії змінювалася століттями і набула нинішнього вигляду в понятті симетрії. Вчення про симетрію набуло наукової форми завдяки відкриттю поняття групи (Галуа, 1832), симетрії кристалів (Федоров, Шенфліс, 1891). Теоретико-групові підходи завдяки цим відкриттям поширилися на кристалографію, кристалофізику, а згодом і на всю фізику й інші природничі науки. Проблеми біологічних симетрій на кромолікулярному рівні розглядались навіть на спеціальному Нобелівському симпозіумі. З розвитком біології виникають відкриття нових фактів залежності принципам симетрії різних біологічних об'єктів. Тому сьогодні метод симетрії є одним з важливих методів пізнання в багатьох областях науки.

На сучасному етапі симетрію прийнято вживати як геометричне, так і філософське поняття. Геометричне пов'язане з рівністю предметів, з центральною осью симетрії. З філософського погляду симетрія є методом знаходження і опису інваріантних закономірностей – «законів збереження». «Принципи симетрії вимагають: шукайте в кожному матеріальному процесі незмінну величину, відношення, закон!» [1]. На основі законів симетрії будуються симетричні зображення, які належать до складних (наділених певною структурою) зображень, що широко представлені в комп'ютерному зорі.

Для аналізу складних зображень використовують різні класичні методи з теорії розпізнавання образів: статистичні і структурні [2], алгебраїчні і геометричні, методи, які ґрунтуються на нейронних мережах. На наш погляд, прийнятними методами для аналізу симетричних зображень є структурні, які використовують кристалографічні групи симетрії [3, 4].

Пошуку повторюваних елементів (образів) на зображеннях природних об'єктів присвячені роботи [5, 6]. Можна виділити такі підходи до виявлення повторюваних образів. Перший [5] – знаходження множини ознак елементів зображення і побудова гіпотези про їх зв'язки (переноси), відповідно до специфічної параметричної моделі. Переваги цього методу – здатність виявити малі відносно розміру всього зображення повторювані елементи і здатність групувати елементи, незважаючи на локальні деформації поверхні об'єкта, зображення якого аналізується. Недоліком є можливість застосування тільки для зображень з чіткими контурами об'єктів.

Другий підхід ґрунтується на використанні автокореляційної функції [7] або перетворення Фур'є [8]. Він підходить для будь-якого зображення, проте його недоліком є припущення, що повторюваний образ займає велику частину зображення. У цій статті для аналізу симетричних зображень використано теоретико-груповий підхід [9].

Постановка задачі

Нехай задане поле зору $P = \{(x, y) | 1 \leq x \leq r, 1 \leq y \leq s\}$, де r і s – довжина і ширина прямокутної рамки – поля зору. На полі зору P задане елементарне зображення Ime . Елементарне зображення Ime – несиметрична частина поля зору, $Ime = \{(x, y) | 1 \leq x \leq p, 1 \leq y \leq t\}$, $Ime \subset P$.

Існують такі геометричні перетворення $T_1, T_2, \dots, T_n$ (центральна симетрія, осьова симетрія, ковзне відображення, поворот). Позначимо множину цих геометричних перетворень через $S = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$.

Виконавши геометричні перетворення над елементарним зображенням Ime , отримаємо рапорт, тобто $Rp = S(Ime) = \{s(Ime) | s \in S\}$, $S(Ime) = \{s(x, y) | x, y \in Ime, 1 \leq x \leq m, 1 \leq y \leq n\}$.

Отже, рапорт Rp – це складне зображення, отримане в результаті виконання геометричних перетворень над елементарним зображенням. При цьому виконується умова $S(Ime) \cap Ime = \emptyset$, тобто при перетвореннях в утворенні рапорту відсутнє накладання елементарних зображень.

Якщо здійснити паралельні переноси L вздовж однієї або двох осей, то отримаємо відповідно симетричне зображення Ims на смугі або площині, тобто

$$Ims = L(Rp) = \{l(Rp) | l \in L\}$$

$$L(Rp) = \{l(x, y) | x, y \in Rp, 1 \leq x \leq r, 1 \leq y \leq s\}$$

На площині існує 17 груп симетрії, а на смугі відповідно існує 7 різних груп симетрії [10].

Позначимо через $A = \{G_1, G_2, \dots, G_7\}$ – множину груп смуги, а через $B = \{H_1, H_2, \dots, H_{17}\}$ – множину груп площини.

Задане симетричне зображення Ims .

Необхідно знайти:

1. Групи H_i, G_i , на основі яких побудоване зображення Ims .
2. Рапорт і елементарний рисунок Rp, Ime .

Метод аналізу симетричних зображень

Метод аналізу симетричних зображень ґрунтується на алгоритмах визначення рапорту за автокореляційною функцією й ідентифікації груп симетрії на основі введеної піксельної алгебри визначеного рапорту.

Нехай задане симетричне зображення Ims . Ідентифікуємо рапорт Rp зображення Ims на основі автокореляційної функції [11]. Автокореляційна функція для вікна розміром $(2W + 1) \times (2W + 1)$:

$$A(x, y) = \frac{\sum_{x=j-W}^{j+W} \sum_{y=k-W}^{k+W} Ims(x, y) Ims(x - \varepsilon, y - \eta)}{\sum_{x=j-W}^{j+W} \sum_{y=k-W}^{k+W} Ims^2(x, y)}$$

обчислюється для кожної точки зображення $Ims(x, y)$ і при зміщеннях $\varepsilon, \eta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm T$.

Визначаємо локальні максимуми на автокореляційній поверхні [6] і сортуємо їх за спаданням значень, у результаті чого отримуємо список $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$. Потім для кожного максимуму Q_j , розраховуємо відстань $d(Q_j, Q_i)$ до елементу Q_i , $1 \leq i < j$, який розміщується перед поточним у списку. Наступним кроком знаходимо мінімальну відстань d_i між локальними максимумами. На основі мінімальної відстані знаходимо вектори перенесення t_1 і t_2 , що утворюють сітку, в якій знаходиться рапорт Rp .

Введемо дві бінарні логічні операції «+» і «×» («додавання» і «множення»). Використаємо дані операції до цифрових зображень з метою визначення відповідної групи перетворення.

Логічні операції виконуватимуться поелементно над відповідними пікселями u та v зображення $Im s$ $u \in Z, v \in Z$. Нехай задана множина $M = \{0, 1, \dots, 2^{n-1}\}$, елементами якої є коди пікселів, n – глибина кольору, 0 – колір фону, a та b – значення кольорів пікселів, відмінних від фону, $a \in M, b \in M$. Задамо дві бінарні операції на множині M : «+» і « $\times$ » («додавання» і «множення»). Результати цих операцій для заданих двох елементів $u, v \in M$ наведено в табл. 1. Як бачимо, в результаті виконання бінарних операцій отримується множина $L = \{0, 1\}$, $L \subset M$, яка містить два елементи (0 – фон, 1 – об’єкт), тобто отримується бінарне зображення.

Таблиця 1

Бінарні операції та їх результати

u	v	$u + v$	$u \times v$
0	0	0	0
a	0	1	0
0	a	1	0
a	a	0	1
a	b	0	1

Для введених операцій на множині M характерні властивості:

1. Комутативність:

$$u + v = v + u;$$

$$u \times v = v \times u;$$

2. Асоціативність:

$$u + (v + w) = (u + v) + w;$$

$$u \times (v \times w) = (u \times v) \times w;$$

3. Дистрибутивність:

$$u \times (v + w) = u \times v + u \times w.$$

Алгоритми визначення груп симетрії

Припустимо, що знайдений рапорт R_r розміром $m \times n$. Тобто маємо вихідну матрицю A

розміром $m \times n$: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$

1. Ділимо матрицю A на дві розміру $m \times k$ матриці A_1 та A_2 :

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{1k+1} & a_{1k+2} & \dots & a_{1n} \\ a_{2k+1} & a_{2k+2} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{mk+1} & a_{mk+2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ при } n - \text{ парному, } k = \frac{n}{2} \text{ та}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{1k} & a_{1k+2} & \dots & a_{1n} \\ a_{2k} & a_{2k+2} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{mk} & a_{mk+2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ при } n - \text{ непарному, } k = \frac{n+1}{2}.$$

2. „Додаємо” A_1 та A_2 , а також „множимо” їх за законами, наведеними в таблиці.

Результатом будуть бінарні матриці розміру $m \times k$, які позначимо A^+ та A^* .

3. В отриманих матрицях визначаємо вид симетрії. Кожній групі симетрії відповідатимуть матриці з характерною симетрією (табл. 2 для груп смуги, табл. 3 – для груп площини).

4. Якщо табл. 2, 3 не дають однозначної відповіді, тобто для деяких груп вид симетрії буде однаковий, тоді необхідно додатково перевірити рапорт за наступними кроками.

5. Ділимо матрицю A на дві розміру $l \times n$ матриці A_3 та A_4 :

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} a_{l+1,1} & a_{l+1,2} & \dots & a_{l+1,n} \\ a_{l+2,1} & a_{l+2,2} & \dots & a_{l+2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ при } m - \text{ парному, } l = \frac{m}{2} \text{ та}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ a_{l+1,1} & a_{l+1,2} & \dots & a_{l+1,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ при } m - \text{ непарному, } l = \frac{m+1}{2}.$$

6. „Додаємо” і „множимо” A_3 та A_4 . Результатом будуть бінарні матриці розміру $l \times n$, які позначимо B^+ та B^* . Висновки для груп смуги робимо згідно з табл. 2, для груп площини – згідно з табл. 3.

7. Для груп смуги алгоритм припиняє роботу. Якщо табл. 3 не дає однозначної відповіді для груп площини, тобто для деяких груп вид симетрії однаковий, тоді необхідно додатково перевірити рапорт за наступними кроками.

8. Ділимо матрицю A на чотири розміру $l \times k$ матриці A_{11} , A_{12} , A_{21} та A_{22} :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lk} \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} a_{1k+1} & a_{1k+2} & \dots & a_{1n} \\ a_{2k+1} & a_{2k+2} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{lk+1} & a_{lk+2} & \dots & a_{ln} \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{l+1,1} & a_{l+1,2} & \dots & a_{l+1,k} \\ a_{l+2,1} & a_{l+2,2} & \dots & a_{l+2,k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} a_{l+1,k+1} & a_{l+1,k+2} & \dots & a_{l+1,n} \\ a_{l+2,k+1} & a_{l+2,k+2} & \dots & a_{l+2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m,k+1} & a_{m,k+2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ при } n \text{ та } m - \text{ парних};$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lk} \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} a_{1k} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{2k} & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{lk} & a_{lk+1} & \dots & a_{ln} \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lk} \\ a_{l+1,1} & a_{l+1,2} & \dots & a_{l+1,k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} a_{l,k} & a_{l,k+1} & \dots & a_{l,n} \\ a_{l+1,k} & a_{l+1,k+1} & \dots & a_{l+1,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{mk} & a_{m,k+1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ при } n \text{ та } m - \text{ непарних}$$

(при n – парному, m – непарному та навпаки матриці будуються аналогічно).

9. „Додаємо” і „множимо” A_{11} , A_{12} , A_{21} та A_{22} попарно. Результатом будуть бінарні матриці розміру $l \times k$: $A_{11} + A_{12} = B_{12}^+$, $A_{11} \times A_{12} = B_{12}^*$, $A_{11} + A_{22} = B_{13}^+$, $A_{11} \times A_{22} = B_{13}^*$, $A_{11} + A_{21} = B_{14}^+$, $A_{11} \times A_{21} = B_{14}^*$, $A_{12} + A_{22} = B_{23}^+$, $A_{12} \times A_{22} = B_{23}^*$, $A_{12} + A_{21} = B_{24}^+$, $A_{12} \times A_{21} = B_{24}^*$, $A_{22} + A_{21} = B_{34}^+$, $A_{22} \times A_{21} = B_{34}^*$. Висновки для груп площини робимо згідно з табл. 4.

Таблиця 2

Види симетрії в бінарних матрицях рапортів груп смуги

група	Види симетрії в матрицях, отриманих в результаті «додавання» і «множення» матриць A_1 і A_2 та A_3 і A_4	
	A^+ та A^*	B^+ та B^*
$p1m$	вертикальна симетрія	вертикальна симетрія
pg	горизонтальна симетрія	симетрії не існує
pt	горизонтальна симетрія	горизонтальна симетрія
$p2$	центральна симетрія	центральна симетрія
ptg	центральна, вертикальна і горизонтальна симетрії	вертикальна симетрія
ptm	центральна, вертикальна і горизонтальна симетрії	центральна, вертикальна і горизонтальна симетрії
$p1$	симетрії не існує	симетрії не існує

Центральна симетрія – $a_{ij} = a_{m-i+1, n-j+1}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Горизонтальна симетрія – $a_{ij} = a_{m-i+1, j}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Вертикальна симетрія – $a_{ij} = a_{i, n-j+1}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Симетрія відносно головної діагоналі – $a_{ij} = a_{ji}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m}$.

Симетрія відносно допоміжної діагоналі – $a_{ij} = a_{m-j+1, m-i+1}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m}$.

Обернено транспоновані матриці – $\{a_{ij}\}_{i=\overline{1, m}; j=\overline{1, n}}$ та $\{b_{ij}\}_{i=\overline{1, n}; j=\overline{1, m}}$ – $a_{ij} = b_{n-j+1, m-i+1}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Таблиця 3

Види симетрії в бінарних матрицях рапортів груп площини

група	Види симетрії в матрицях, отриманих в результаті «додавання» і «множення» матриць A_1 і A_2 та A_3 і A_4	
	A^+ та A^*	B^+ та B^*
$p2$	центральна симетрія	центральна симетрія
pt	вертикальна симетрія	вертикальна симетрія
pg	A^+ є зворотно транспонованою до B^+ , підматриці однакові і симетричні відносно допоміжних діагоналей	A^* є зворотно транспонованою до B^* , підматриці однакові і симетричні відносно допоміжних діагоналей
ct	A^+ є зворотно транспонованою до B^+ , підматриці різні, але симетричні відносно допоміжних діагоналей	A^* є зворотно транспонованою до B^* , підматриці різні, але симетричні відносно допоміжних діагоналей
ptm	центральна, вертикальна і горизонтальна симетрії	центральна, вертикальна і горизонтальна симетрії
ptg	центральна симетрія A^+ є транспонованою до B^+ підматриці однакові і симетричні відносно обох діагоналей	центральна симетрія A^* є транспонованою до B^* підматриці однакові і симетричні відносно обох діагоналей
pgg	центральна симетрія, підматриці мають горизонтальну симетрію	центральна симетрія, підматриці мають вертикальну симетрію
ctm	центральна симетрія	центральна симетрія
$p4$	центральна симетрія	центральна симетрія
$p4m$	центральна, вертикальна і горизонтальна симетрії	центральна, вертикальна і горизонтальна симетрії
$p4g$	центральна симетрія, підматриці мають горизонтальну симетрію	центральна симетрія, підматриці мають вертикальну симетрію
$p1$	симетрії не існує	симетрії не існує

Додаткова перевірка симетрії в бінарних матрицях рапортів груп площини

група	Види симетрії в результаті попарного «додавання» і «множення» матриць A_{11} , A_{12} , A_{21} та A_{22}					
	B_{12}^+ , B_{12}^*	B_{13}^+ , B_{13}^*	B_{14}^+ , B_{14}^*	B_{23}^+ , B_{23}^*	B_{24}^+ , B_{24}^*	B_{34}^+ , B_{34}^*
p4m	вертикальна симетрія	центральна симетрія, симетрія відносно обох діагоналей	горизонтальна симетрія	горизонтальна симетрія	центральна симетрія, симетрія відносно обох діагоналей	вертикальна симетрія
сmm	симетрії не існує	центральна симетрія, симетрія відносно обох діагоналей	симетрії не існує	симетрії не існує	центральна симетрія, симетрія відносно обох діагоналей	симетрії не існує
p4	симетрії не існує	центральна симетрія	симетрії не існує	симетрії не існує	центральна симетрія	симетрії не існує
p2	симетрії не існує	центральна симетрія	симетрії не існує	симетрії не існує	центральна симетрія	симетрії не існує
p4g	горизонтальна симетрія	центральна симетрія, симетрія відносно обох діагоналей	вертикальна симетрія	вертикальна симетрія	центральна симетрія, симетрія відносно обох діагоналей	горизонтальна симетрія
pgg	горизонтальна симетрія	центральна симетрія	вертикальна симетрія	вертикальна симетрія	центральна симетрія	горизонтальна симетрія
pmm	вертикальна симетрія	центральна симетрія	горизонтальна симетрія	горизонтальна симетрія	центральна симетрія	вертикальна симетрія

Якщо групу визначено, то можна швидко знайти елементарний рисунок. Він дорівнюватиме або рапорту, або 1/2 рапорту, або 1/4 рапорту. Розміри елементарного рисунку для кожної групи вказано у табл. 5.

Таблиця 5

Розміри елементарного рисунку

Розміри елементарного рисунку	Групи смуги	Групи площини
рапорт	$p1$	$p1$
1/2 рапорту	$pg, p1m, p2, pm$	$p2, pm, cm, cmm$
1/4 рапорту	pmg, pmm	$pg, pmm, pmg, pgg, p4, p4m, p4g$

Експериментальні дослідження

Нехай задане складне зображення-орнамент (рис. 1).

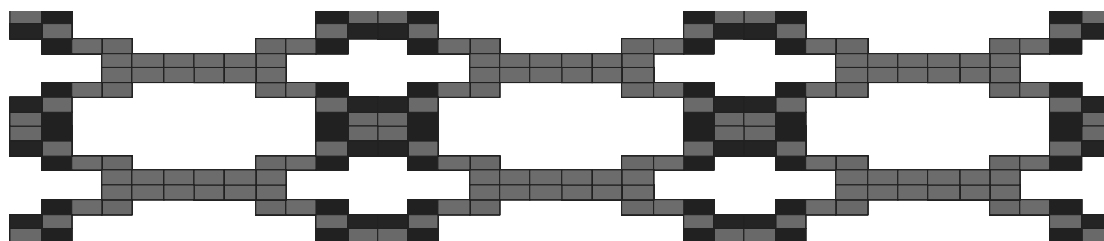


Рис. 1. Приклад зображення

На основі алгоритму визначення рапорту знаходимо автокореляційну функцію (рис. 2).

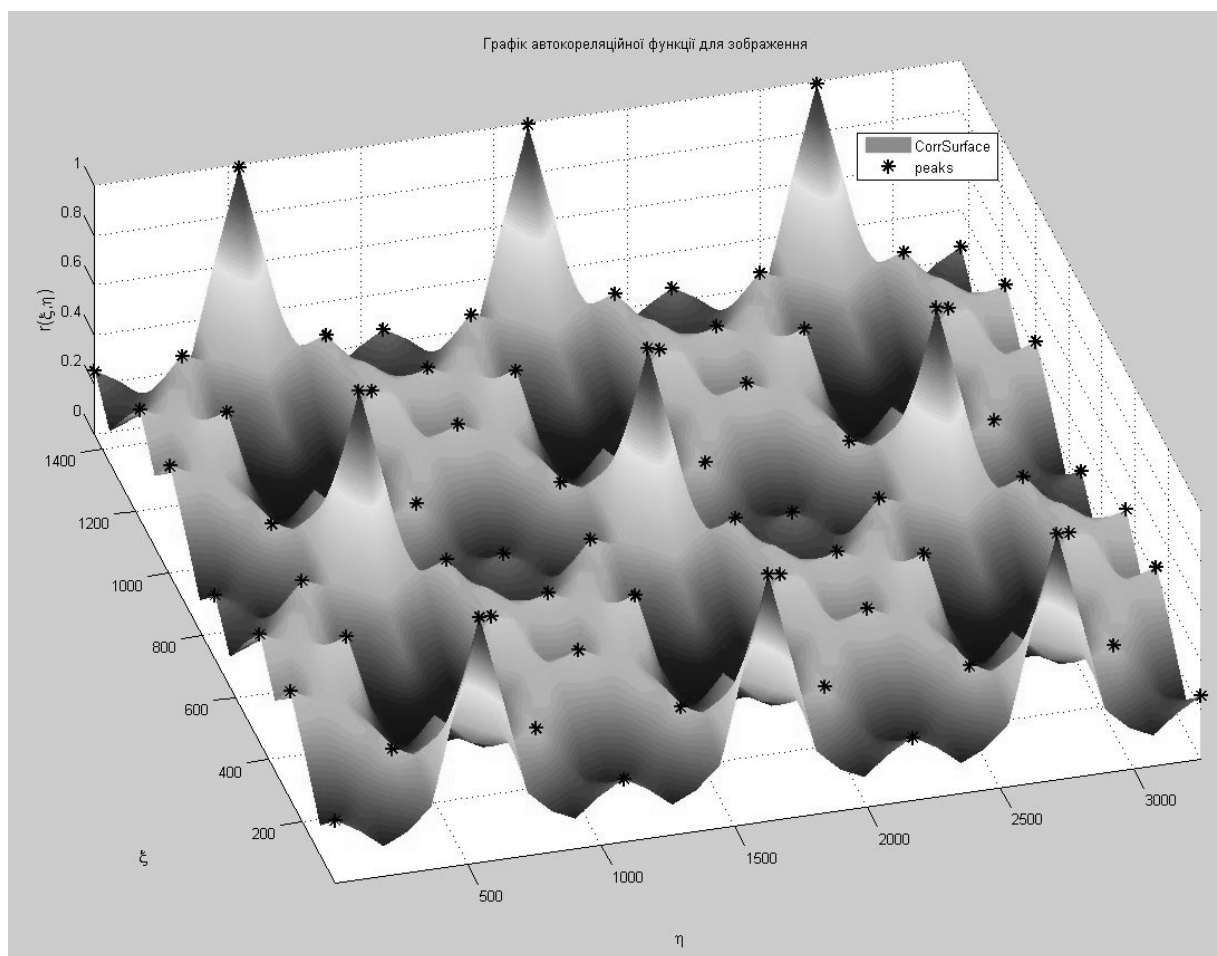


Рис. 2. Графік автокореляційної функції для зображення з рис. 1

Виділений рапорт наведено на рис. 3.

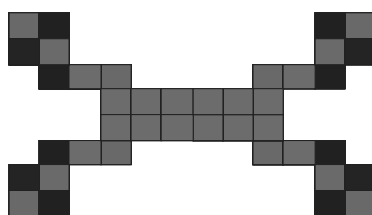


Рис. 3. Рапорт

Для знайденого рапорту вихідна матриця A , отримані матриці A_1 , A_2 , A_3 , A_4 є наступні:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

В результаті додавання і множення вище приведених матриць отримуємо бінарні матриці:

$$A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Всі матриці наділені горизонтальною, вертикальною і центральною симетрією, що є ознакою того (табл. 3), що рапорт належить групі *ртт*. Розділимо рапорт на чотири частини і отримаємо елементарний рисунок (рис. 4).

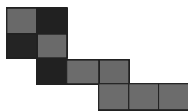


Рис. 4. Елементарний рисунок

Висновки

Запропоновані метод і алгоритми дають змогу автоматично визначати структурні складові симетричного зображення: рапорт і елементарний рисунок. Це дає змогу визначити закони побудови симетричного зображення (групу симетрії), що допомагає економно зберігати складні зображення симетричної структури.

1. Шубников А.В. Симметрия в науке и искусстве. Издание третье, дополненное / А.В. Шубников, В.А. Копчик – М.: Институт компьютерных исследований, 2004. – 560 с.
2. Шлезингер М. Десять лекций по статистическому и структурному распознаванию / М. Шлезингер, В. Главач – К.: Наукова думка, 2004. – 545 с.
3. Грицик В.В. Моделивання та синтез складних зображень симетричної структури. / В.В. Грицик, К.М. Березька, О.М. Березький. – Львів.: Вид-во “Українська академія друкарства; Державний науково-дослідний інститут інформаційної інфраструктури”, 2005. – 140 с.
4. Файн В.С. Опознавание изображений (основы непрерывной теории и ее приложения) / В.С. Файн – М.: Наука, 1970. – 299 с.
5. Leung T., Malik J. Detecting, localizing and grouping repeated scene elements / T. Leung, J. Malik // 4th European Conference on Computer Vision Cambridge, UK, April 15–18, 1996 Proceedings – 1996. – С. 546–55.
6. Liu Y. Computational Model for Periodic Pattern Perception Based on Frieze and Wallpaper Groups / Yanxi Liu, Robert T. Collins, Yanghai Tsin // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (TPAMI) – 2004. – Т. 1, № 26. – С. 354 – 371.
7. Lin H.C. Extracting periodicity of a regular texture based on autocorrelation functions / Hsin-Chih Lin, Ling-Ling Wang, Shi-Nine Yang // Pattern Recognition Letters – 1997. – Т. 5, № 18. – С. 433–443.
8. Russ J. The Image Processing Handbook, second Edition. / J. Russ – US: CRC Press, 1995. – 688 с.
9. Грицик В.В. Методи і алгоритми аналізу та синтезу складних зображень на основі теоретико-групового підходу / Грицик В.В., Березький О.М. // Доповіді Національної академії наук України. – 2009. №11. – С. 64–69.
10. Polya G. Uber die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene / G. Polya – 1924 – P. 278–282.