УДК 004.397.3

О. М. Березький

ТОПОЛОГІЧНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ОБЛАСТЕЙ: ВИПАДОК НЕІЗОМОРФНИХ СКЕЛЕТІВ

A method and algorithm for “region–region” type transformation is presented. Transformation of regions of images is reduced to transformation of their skeletons. The algorithm of transforming unisomorphic skeletons to isomorphic ones are developed. Investigation of the developed algorithm is conducted on the example of cytological images.

Keywords: *transformation, unisomorphic skeleton, tree, cytological images.*

Запропоновано метод і алгоритм для перетворення типу “область–область”. Перетворення областей зображень зведено до перетворення їхніх скелетів. Розроблено алгоритм приведення неізоморфних скелетів до ізоморфних. Дослідження розробленого алгоритму проведено на прикладі цитологічних зображень.

Ключові слова: *перетворення, неізоморфний скелет, дерево, цитологічні зображення.*

Під час обробки зображень у автоматизованих системах технічного зору, біомедичних зображень виникають задачі перетворення зображень [1–3]. В одних випадках їх застосовують для нормалізації зображень [4], в інших – для дослідження закономірностей зміни областей зображень.

Одним із можливих підходів для перетворення областей зображень є підхід, який базується на використанні скелетів зображень [5]. Скелети зображень дають можливість зменшити розмірність задачі. Аналіз зображень на основі скелетизації знайшов широке застосування в обробці біомедичних зображень. Так, в роботі [6] для дослідження морфометричних показників біомедичних зображень застосовують скелетизацію зображень.

У статті [7] розроблено топологічні методи і алгоритми перетворення контурів і областей зображень на площині та доведено теорему про форму скелету лінійно апроксимованих областей. Запропоновані алгоритми перетворення областей розглянуто тільки для випадку ізоморфних скелетів.

Проте, в загальному випадку, при перетворенні областей скелети областей є неізоморфними. Це порушує умову перетворення областей зображень, яка засвідчує про необхідність ізоморфності скелетів перетворюваних областей. Тому актуальною задачею є приведення неізоморфних скелетів до ізоморфних і знаходження на їх основі перетворення типу “область в область”.

Постановка задачі. Нехай задано два зображення Im_1 та Im_2 у топологічному просторі R^2 (рис. 1).

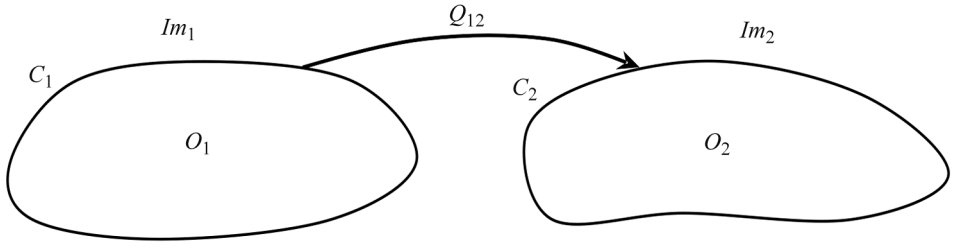

Рис. 1. Перетворення типу “область–область”.

© О. М. Березький, 2010

Виділимо контури і області зображень Im_1 та Im_2: $C_1 = \partial O_1$, $C_2 = \partial O_2$, де C_1, C_2 – контури, O_1, O_2 – області зображень Im_1 та Im_2 відповідно.

Згідно з теоремою Жордана [8, 9] для замкнутих областей існує перетворення, яке перетворює одну область в іншу, одну підобласть в іншу підобласть. Тобто для областей O_1 і O_2 маємо $O_2 = Q_{12}(O_1)$, де Q_{12} – перетворення області O_1 в O_2. Дамо визначення скелета. Нехай для кожного $C \in O$, $pr(C) = \{C' \in \partial O \,|\, |C' - C| = \inf |C'' - C|\}$, де $C'' \in \partial O$. Цю множину називають метричною проекцією точки *C*.

Для евклідової метрики є таке визначення скелету:

$sk(O) = \{C' \in \partial O \,|$ множина $pr(C)$ складається більш ніж із однієї точки $\}$.

Використаємо l_∞-метрику. В ній означення скелету таке: точка належить скелету області, якщо вона є центром максимального вписаного в область квадрата із сторонами, паралельними координатним осям.

Отже, для області O_1 матимемо скелет $sk_1(O_1)$, а для O_2 – $sk_2(O_2)$.

У роботі [7] показано, що для кусково-лінійних апроксимованих контурів C_1 і C_2 скелети областей O_1 і O_2 є кусково-лінійними. Крім цього, $sk_1(O_1)$ і $sk_2(O_2)$ є графами без циклів (деревами). Отже, скелети $sk_1(V_1, E_1)$, і $sk_2(V_2, E_2)$ є деревами, де V_1, V_2 – множини вершин, а E_1, E_2 – множини ребер (гілок).

Для існування перетворення однієї області в іншу необхідно і достатньо, щоб виділені скелети повинні були ізоморфно вкладеними графами. Два графи G_1 и $G_2 \subset R^2$ називають ізоморфно вкладеними, якщо існує гомеоморфізм u: $R^2 \to R^2$ так, що $u(G_1) = G_2$. Скелети $sk_1(V_1, E_1)$ і $sk_2(V_2, E_2)$ будуть ізоморфними, якщо існує перетворення $f : V_1 \to V_2$, для якого виконується така умова: $v, w \in V_1$ з'єднані ребром, то $f(v), f(w) \in V_2$ також з'єднані ребром.

Але скелети $sk_1(O_1)$ і $sk_2(O_2)$ в загальному випадку є неізоморфними.

Тому для здійснення перетворення однієї області в іншу необхідно:

1. Привести скелети $sk_1(O_1)$ і $sk_2(O_2)$ до ізоморфних скелетів $sk_3(O_1')$ і $sk_3(O_2')$, де O_1' і O_2' – модифіковані області (області після перетворення скелетів змінюються в межах заданої похибки).

2. Знайти перетворення Q_{12}.

Метод перетворення типу "область–область". Розглянемо метод, що реалізує приведення неізоморфних скелетів до ізоморфних і здійснює перетворення однієї області в іншу.

Нехай задано два зображення Im_1 та Im_2 (рис. 1). Запишемо кожне зображення у вигляді $Im_1 = C_1 \cup O_1$, $Im_2 = C_2 \cup O_2$ контурів і внутрішніх областей. Лінійно апроксимуємо контури зображень

$$C_i = \bigcup_{j=1}^{l} \left\{ (x, a_j x + b_j \,|\, x \in \left[c_j ; d_j \right] \right\}, \quad \text{де} \quad a_j, b_j, c_j, d_j \in R, i = \overline{1,2}. \tag{1}$$

Знайдемо скелети двох зображень $sk_1(O_1)$ і $sk_2(O_2)$.

Ці скелети $sk_1(O_1)$ і $sk_2(O_2)$ в загальному випадку є неізоморфними деревами.

Введемо поняття ε-скелету.

Означення. ε-скелетом називається скелет, для якого виконується умова

$$sk_\varepsilon(O) = \{ x \in IntO \,|\, diam\ pr(x) \geq \varepsilon \},$$

$$pr(x) = \left\{ y \in \partial O \,|\, |x - y| = \min_{y' \in O} |x - y'| \right\}.$$

Твердження. Скелет зображення складається з його ε-скелетів. Це твердження випливає із означення ε-скелету (рис. 2).

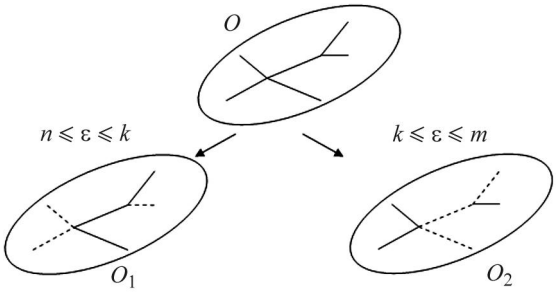

Рис. 2. Розклад скелету зображення на ε-скелети.

Теорема. Існує $\varepsilon > 0$ таке, що ε-скелет є деформаційним ретрактом полігональної області.

Доведення. Відомо, що скелет є деревом [7], складеним з прямолінійних відрізків. Поділимо сім'ю S усіх цих відрізків на дві підсім'ї: S_1, що складається з відрізків у внутрішності області, і S_2 − решти, тобто відрізків, що дотикаються до межі області.

Нехай $\varepsilon_0 = \min\{r(x) \,|\, r(x) -$ радіус максимального кола в $x \in \cup S_1\}$. Оскільки $\cup S_1$ − компакт, маємо, що $\varepsilon_0 > 0$.

Нехай тепер $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Тоді ε-скелет буде деревом (піддеревом у скелеті). Оскільки кожне дерево є абсолютним ретрактом, одержуємо, що ε-скелет є ретрактом скелета. Але кожен ретракт деформаційного ретракту є знову деформаційним ретрактом і це доводить теорему.

Для заданих областей O_1 і O_2 побудуємо ε-скелети. Оцінимо ваги гілок через ваги точок, що їм належать (кожна точка є центром максимального вписаного квадрата). Значення ε рівне стороні максимального вписаного квадрата, дві вершини якого належать зовнішньому контуру області [7]. В результаті маємо масив $R = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\}$ значень ваг точок. Вага гілки $e_i \in E$ визначається на основі ваг точок ε-скелета (наприклад, як середньоарифметичне значення ваг точок), тобто

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} / n, \; i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

де m – кількість гілок в скелеті.

Введемо функції $w: V \to M_w$, $z: E \to M_z$, де M_w і M_z – довільні множини. Ці множини характеризують вагові коефіцієнти гілок і степені вершин (степінь вершини рівна кількості гілок, які зв'язані з нею) відповідно. В результаті оцінки ваг гілок і степенів вершин одержуємо зважені скелети $sk_1(V_1, E_1, w_1, z_1)$, $sk_2(V_2, E_2, w_2, z_2)$. Це дасть змогу оцінити дерева скелетів під час здійснення перетворень.

Для двох неізоморфних скелетів sk_1 і sk_2 будуємо кореневі дерева і розбиваємо їх на рівні (рис. 3).

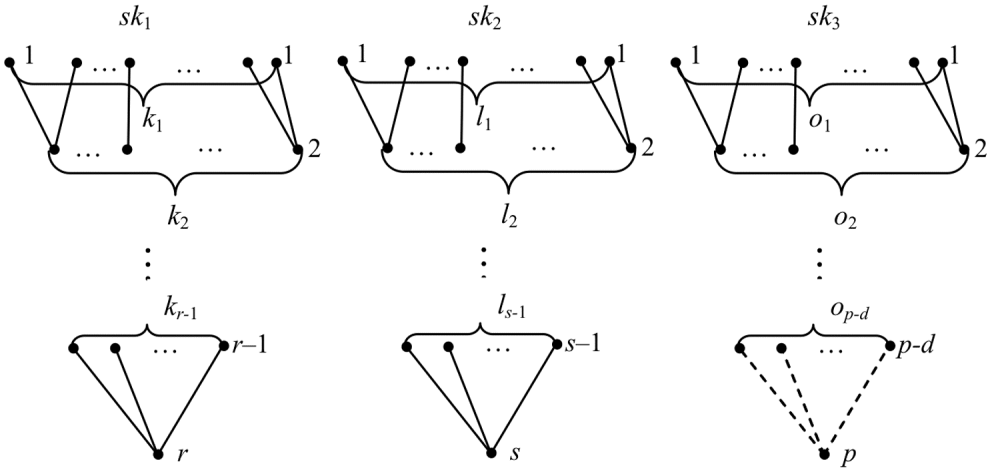

Рис. 3. Приведення неізоморфних кореневих дерев до ізоморфного дерева.

Нехай для скелету sk_1 кількість рівнів становить r, для sk_2 – s. Тоді для скелету sk_3 кількість рівнів $p = \max\{r; s\}$.

Розглянемо випадки.

Припустимо $r > s$ ($r < s$). Тоді різниця рівнів становить $d = r - s$ ($d = s - r$). Для приведення sk_1 і sk_2 до однакової кількості рівнів додамо до s (r) рівня d рівнів.

Від рівня p до рівня $p–d$ структура скелету sk_3 повторює структури скелетів $sk_1(r > s)$ або $sk_2(r < s)$. Таким чином ми привели скелети sk_1 і sk_2 до однакової кількості рівнів.

Розглянемо рівні від $p - d$ до 1. Необхідною і достатньою умовою ізоморфності скелетів є однакова кількість вершин з рівними степенями на відповідних рівнях. Запишемо відповідні рівні скелетів кортежами:

$$sk_1:\ j_1^{(1)} j_2^{(1)} \ldots j_{k_1}^{(1)} j_1^{(2)} j_2^{(2)} \ldots j_{k_2}^{(2)} \ldots j_1^{(r)} j_2^{(r)} \ldots j_{k_r}^{(r)},$$

$$sk_2:\ j_1^{(1)} j_2^{(1)} \ldots j_{l_1}^{(1)} j_1^{(2)} j_2^{(2)} \ldots j_{l_2}^{(2)} \ldots j_1^{(s)} j_2^{(s)} \ldots j_{l_s}^{(s)},$$

$$sk_3:\ j_1^{(1)} j_2^{(1)} \ldots j_{o_1}^{(1)} j_1^{(2)} j_2^{(2)} \ldots j_{o_2}^{(2)} \ldots j_1^{(p)} j_2^{(p)} \ldots j_{o_p}^{(p)}.$$

Структура кортежу для t-ї вершини q-го рівня така: $j_t^{(q)} = \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$, де $a_1, a_2, ..., a_n$ – степені суміжних вершин, нижчих рівнів. Тоді кількість вершин для i-го рівня скелету sk_3 дорівнює $o_i = \max\{k_i, l_i\}$ і кортежі повинні бути рівними $j_{k_i}^{(i)} = j_{l_i}^{(i)} = j_{o_i}^{(i)}$.

Для перетворення скелетів введемо такі операції з вершинами та гілками.

Операції для гілок:

а) відсікання гілки *CUT* (“номер рівня”, “номер гілки”, “вага”);

б) додавання гілки *ADD* (“номер рівня”, “номер гілки”, “вага”).

Операції для вершин:

а) вилучення вершини *DEL*(“номер рівня”, “номер вершини”, “степінь вершини”);

б) вставка вершин *INS*(“номер рівня”, “номер вершини”, “степінь вершини”).

Операції вилучення вершин і відсікання гілок проводимо на початковому етапі з метою спрощення скелетів.

Відсікання гілок проходить на основі критерію мінімізації втрат площі або периметру області O із заданою похибкою.

При цьому пропонуються два критерії:

1. Критерій відновлення площі області.

2. Критерій відновлення периметру області.

Для першого критерію введемо коефіцієнт нарощування (втрати) площі області при відновленні. Він дорівнює

$$K_S = \left(1 \pm \frac{S_i}{S_0}\right) \cdot 100\%, \tag{3}$$

де S_0 – початкова площа області; S_i – відновлена площа області з (без) i-ю гілкою скелету.

Для другого критерію введемо коефіцієнт нарощування (втрати) периметру області при відновленні. Він дорівнює

$$K_P = \left(1 \pm \frac{P_i}{P_0}\right) \cdot 100\%, \tag{4}$$

де P_0 – початковий периметр області; P_i – відновлений периметр області з (без) i-ю гілкою скелету.

Додавання гілок і вставка вершин проходить на етапі побудови ізоморфного скелету і передбачає задання незначних ваг гілок і степенів вершин, які несуттєво впливають на похибки нарощування площі та периметру області O.

У результаті отримаємо скелет $sk_3(V_3, E_3, w_3, z_3)$, до якого приведено скелети $sk_1(V_3, E_3, w_3, z_3)$ і $sk_2(V_3, E_3, w_3, z_3)$. Таким чином отримуємо ізоморфні скелети $sk_1(O_1')$ і $sk_2(O_2')$. Області O_1' і O_2' є модифікованими (межах похибки) областями O_1 і O_2 після відсікання і додавання гілок, видалення і вставки вершин дерев скелетів.

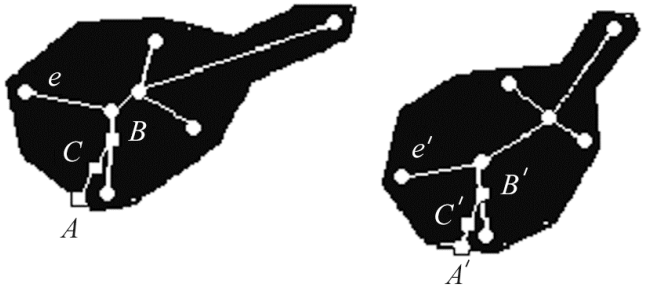

Рис. 4. Перетворення області в область.

Після приведення неізоморфних скелетів до ізоморфних необхідно здійснити перетворення однієї області в іншу. Для цього знайдемо перетворення гілки e_i скелета $sk_1(V_1)$ у відповідну гілку e_i' скелета $sk_2(V_2)$. Перетворення будь-якої точки C області V_1 у відповідну точку C' області V_2 здійснюється так (рис. 4): знаходимо проекції точки C на відповідний сегмент контура (т. A) і гілки скелета (т. B). Координати точки C обчислюються через координати точок A і B: $C = tA + (1-t)B$, де $t = \dfrac{|C-B|}{|A-B|}$. Координати точок A' і B' області V_1 дорівнюють: $A'=T_1(A)$, $B'=T_2(A)$. Відповідно координати точки C' дорівнюють: $C' = tT_1(A) + (1-t)T_2(B)$.

Перетворення Q_{12} області V_1 в область V_2 для будь-яких точок $C \in V_1$ і $C' \in V_2$ дорівнює:

$$Q_{12} = \frac{tT_1(A) + (1-t)T_2(B)}{tA + (1-t)B}. \quad (5)$$

Алгоритм перетворення типу "область–область". Лінійно апроксимуємо контури зображень на основі рівняння (1).

Будуємо ε-скелети дерев $sk_1(O_1)$ і $sk_2(O_2)$ для областей O_1 і O_2.

Знаходимо ваги гілок згідно з виразом (2) $e_i = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} / n$ і степені вузлів, тобто w_1, z_1 і w_2, z_2, і отримуємо зважені скелети $sk_1(V_1, E_1, w_1, z_1)$ і $sk_2(V_2, E_2, w_2, z_2)$.

Відсікаємо гілки з множин E_1, E_2і вилучаємо вершини з множин V_1, V_2 скелетів sk_1 і sk_2 на основі коефіцієнтів нарощування (втрати) площі та периметра (3) і (4).

Будуємо кореневі дерева для скелетів sk_1 і sk_2 і визначаємо кількість рівнів дерева sk_3: $d = r - s$ при $r > s$ і $d = s - r$, якщо $r < s$.

Визначаємо кількість вершин для i-го рівня скелету sk_3, яка дорівнює $o_i = \max\{k_i, l_i\}$.

Додаємо гілки до множини E_3 і вставляємо вершини до множини V_3 скелету sk_3 на основі коефіцієнтів нарощування (втрати) площі та периметра (3) і (4).

Отримуємо скелет $sk_3(V_3, E_3, w_3, z_3)$, до якого приводимо скелети $sk_1(V_3, E_3, w_3, z_3)$ і $sk_2(V_3, E_3, w_3, z_3)$.

Перетворення області в область знаходимо згідно з виразом (5) $Q_{12} = \frac{tT_1(A) + (1-t)T_2(B)}{tA + (1-t)B}$.

Експериментальні дослідження. Експериментальні дослідження проведені в результаті виконання державної бюджетної теми "Інформаційно-аналітична система для дослідження і діагностування пухлинних (ракових) клітин людини на основі аналізу їх зображень" (номер державної реєстрації 0108U002109) [10]. Для прикладу розглянемо цитологічні зображення (рис. 5). Опишемо етапи обробки заданих зображень.

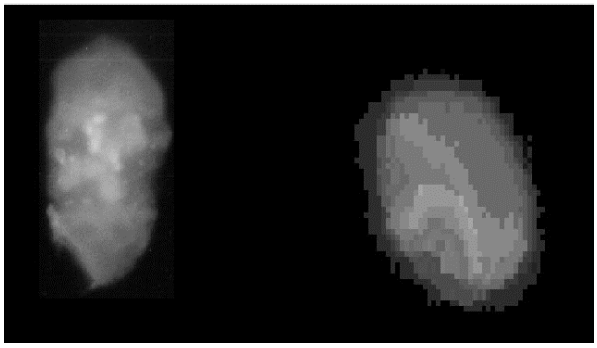

Рис. 5. Приклад вхідного зображення.

Виділення об'єктів. Виділення об'єктів відбувається за допомогою алгоритму сегментації на основі попередніх розміток [11]. Алгоритм ґрунтується на визначенні зв'язків між сусідніми точками зображення з метою подальшого групування в однорідні області на основі структури мікрооб'єктів. Результатом цього

етапу обробки є масив однорідних областей, що відповідають об'єктам на зображенні.

Кодування контурів. Для виділення контурів використовують алгоритм проходження контуром з можливістю зворотного ходу [12]. Критерії зупинки для роботи алгоритму є друге попадання в точку початку проходження. Перевагою даного алгоритму є можливість відсікання малоінформативних відгалужень контуру вже на етапі проходження. Для апроксимації контуру використовують алгоритм кусково-лінійної апроксимації. Результатом роботи цього етапу є кусково-лінійно апроксимовані контури.

Скелетизація. Для визначення скелету однорідної області використовують алгоритм скелетизації на основі l_∞ метрики. Для знаходження точок скелета послідовно перевіряють усі точки кусково-лінійно апроксимованого контуру для визначення максимально вписаного квадрата. Для отримання зв'язного скелету однорідної області проводять додаткову обробку: нарощування та стоншення. Процедури нарощування та стоншення здійснюється на основі масок розміром 3×3. Для представлення скелету знаходимо вузлові точки (вершини) скелету. Вузловою точкою визнається точка, в якої більше двох сусідніх пікселів, що належать скелету. Для визначення гілок скелету використовується алгоритм проходження прямою лінією між двома точками. Відсікання малоінформативних гілок проводиться на основі критеріїв втрати площі та втрати периметру.

Приклад проведення кусково-лінійної апроксимації контурів зображень та процедури скелетизації наведено на рис. 6.

Приведення скелетів до ізоморфного виду. Для представлення скелету у вигляді дерева знаходимо корінь дерева. Коренем дерева визначається вершина з максимальним степенем. Використовуючи операції додавання *ADD* гілок та вставки *INS* вершин, приводимо неізомофні скелети sk_1 і sk_2 до ізоморфних. Ваги доданих гілок та вершин встановлюються мінімальними, для того щоб вони не впливали на похибки відновлення площі та периметру.

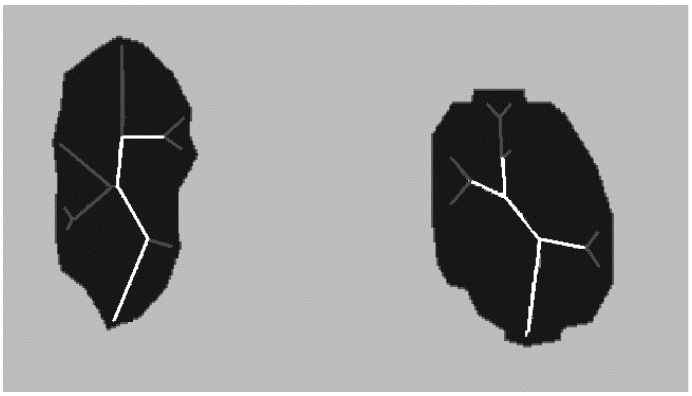

Рис. 6. Об'єкти з визначеними гілками скелетів: білі – основні гілки, сірі – малоінформативні.

Знаходження функцій перетворення типу "область–область". Для отриманих двох ізоморфних скелетів $sk_1(O_1')$ і $sk_2(O_2')$ знаходимо відповідні пари гілок. Наступним кроком є здійснення перетворень гілок e_i скелета $sk_1(V_1)$ у відповідні гілки e_i' скелета $sk_2(V_2)$. Перетворення будь-якої точки області V_1 у відповідну точку області V_2 проводимо на основі рівняння $Q_{12} = \dfrac{tT_1(A) + (1-t)T_2(B)}{tA + (1-t)B}$.

Результати перетворення областей зображень, поданих на рис. 6 наведено в таблиці.

Функції перетворення областей зображень

Скелет sk_1	Функції апроксимованого скелету sk_1	Скелет sk_2	Функції апроксимованого скелету sk_2	Q_{12}
[125; 123]	$y1 = -18x + 2{,}27E03$	[208; 242]	$y2 = -0{,}176x + 135$	$T = -17x + 2{,}33E03$
[159; 123]	$y1 = 0{,}222x + 31{,}7$	[245; 242]	$y2 = 10{,}3x - 2{,}4E03$	$T = 0{,}0833x + 232$
[123; 109]	$y1 = -0{,}571x + 129$	[242; 271]	$y2 = -0{,}724x + 267$	$T = -2{,}07x + 497$
[109; 87]	$y1 = 0{,}682x - 7{,}32$	[271; 255]	$y2 = 0{,}938x - 183$	$T = 0{,}727x + 192$
[109; 27]	$y1 = -0{,}378x + 108$	[271; 300]	$y2 = -1{,}38x + 445$	$T = -0{,}354x + 310$
[109; 103]	$y1 = -4x + 503$	[271; 286]	$y2 = 0{,}667x - 110$	$T = -2{,}5x + 544$

ВИСНОВКИ

Запропоновано метод і алгоритм перетворення типу “область–область” для областей із кусково-лінійними апроксимованими контурами на основі приведення неізоморфних скелетів до ізоморфних. Введення ε-скелету дало змогу спростити скелети областей і здійснювати перетворення областей складних зображень різної природи із заданою похибкою.

1. *Pratt W. K.* Digital image processing // 4th PIKS Scientific inside. – USA: John Wiley & Sons, 2007. – 782 p.
2. *Березький О. М.* Методи та алгоритми перетворення контурів зображень в афінному просторі // Вісник Національного університету “Львівська політехніка”. Комп’ютерні науки та інформаційні технології. – 2009. – № 638. – С. 185–189.
3. *Березский О. Н.* Алгоритмы анализа и синтеза биомедицинских изображений // Проблемы информатики и управления. – 2007. – № 2. – С.134–144.
4. *Путятин Е. П., Аверин С. И.* Обработка изображений в робототехнике. – М.: Машиностроение, 1990 – 320 с.
5. *Blum H.* A Transformation for Extracting New Descriptors of Shape // Models for the Perception of Speech and Visual Form. – USA:MIT Press, 1967. – P. 362–380.
6. *Skeleton* analysis of population images for detection of isolated and overlapped nematode c.elegans / N. B. Rizvandi, A. P._Zurica, F. Rooms, W. Philips // 16th European Signal Proc. Conf. (EUSIPCO 2008) – 2008. – P. 124–129.
7. *Березский О. Н.* Топологические методы и алгоритмы преобразования контуров и областей плоских изображений // Проблемы информатики и управления. – 2010. – № 5. – С. 123–131.
8. *Косневски Ч.* Начальный курс алгебраической топологии. – М.: Мир, 1983. – 304 с.
9. *Мищенко А. С.* Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Физматлит, 2004. – 304 с.
10. *Звіт* про науково-дослідну роботу на тему: “Інформаційно-аналітична система для дослідження і діагностування пухлинних (ракових) клітин людини на основі аналізу їх зображень” (заключний) / О. М. Березький, Ю. М. Батько, Г. М. Мельник та ін. – Тернопіль: ТНЕУ, 2009. – 257 с.
11. *Березький О. М., Батько Ю. М., Мельник Г. М.* Метод сегментації зображень на основі попередніх розміток зображення // Матеріали 4-ї Міжнар. наук.-техн. конф. “Комп’ютерні науки та інформаційні технології 2009”, 15–17 жовтня, 2009, Україна, Львів. – 2009. – С. 48–51.
12. *Березький О. М., Батько Ю. М.* Алгоритм проходження контуром об’єкта з використанням зворотного ходу // Штучний інтелект. – 2009. – № 3. – С. 516–523.

Тернопільський національний економічний університет

Одержано 06.09.2010