

УДК 519.876.5

М. П. Дивак, О. Л. Козак

Тернопільський національний економічний університет
вул. Юності, 9, 46000 Тернопіль, Україна

Метод формування допускової еліпсоїдної оцінки параметрів інтервальних моделей на основі виділення із інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь основних активних обмежень

Запропоновано метод формування конфігурації допускової еліпсоїдної оцінки області параметрів моделей, яка орієнтована в напрямку найбільшої «витягнутості» реальної області, на основі аналізу інтервальних даних. Розглянуто приклад застосування методу.

Ключові слова: допускна еліпсоїдна оцінка, інтервальна модель, інтервальна система лінійних алгебричних рівнянь.

Вступ

Для дослідження систем в усталеному режимі доводиться будувати макромоделі, що описують статичні характеристики цих систем. Серед різноманіття методів побудови моделей статичних систем слід виділити методи аналізу інтервальних даних, які за умов малих вибірок даних, ґрунтуючись на відомих інтервалах значень вихідних даних системи, дозволяють не лише побудувати модель системи, але одночасно отримати гарантовані оцінки її прогностичних властивостей. Застосування методів інтервального аналізу для побудови моделей статичних систем дозволяє розв'язати задачу параметричної ідентифікації, тобто оцінити множину невідомих коефіцієнтів — параметрів системи для заданих загального виду алгебричних рівнянь. Залежно від задачі моделювання розрізняють методи гарантованого [1, 2] та допускового множинного оцінювання параметрів [3]. Застосування методів допускового оцінювання на основі аналізу інтервальних даних дозволяє розв'язати ряд важливих із точки зору практики задач. Зокрема, задач допускового контролю відгуків системи, синтезу та аналізу допусків параметрів систем. Незалежно від виду задачі, методи допускового оцінювання базуються на критеріях максимального об'єму допускової області та мінімізації обчислювальної складності. При цьому використовують різні способи опису допускової області: багатогранниками, прямокутними паралелепіпедами та еліпсоїдами [1, 3, 4]. Одним із найбільш перспективних способів опису допускової області параметрів

© М. П. Дивак, О. Л. Козак

моделей на основі інтервальних даних є опис багатовимірними еліпсоїдами, оскільки він узгоджується із технологічним представленням області параметрів довірчими еліпсоїдами розсіювання.

Проте задача допускового оцінювання параметрів інтервальної моделі багатовимірними еліпсоїдами за критерієм максимального покриття допускової області та критерієм мінімальної обчислювальної складності є складною нелінійною двохкритеріальною оптимізаційною задачею. Враховуючи, що математичні моделі характеристик реальних систем включають достатньо велику кількість параметрів, розв'язок таких задач навіть із застосуванням найпотужніших сучасних обчислювальних засобів стає неможливим. Окрім того, в результаті реалізації складних обчислювальних процедур для пошуку допускової області оцінок параметрів, похибки заокруглень суттєвим чином знижують точність отриманого розв'язку.

У даній роботі розглянуто підхід до розв'язування задачі ідентифікації моделей систем із допусковими оцінками параметрів, який зважено забезпечує помірну та контрольовану обчислювальну складність із одночасним забезпеченням максимального ступеня покриття допускової області її еліпсоїдною оцінкою.

Запропонований підхід передбачає використання двох етапів:

- 1) вибору конфігурації допускової області;
- 2) знаходження допускової області у вигляді еліпсоїда за критерієм максимального покриття реальної допускової області.

Такий підхід має ряд переваг. По-перше, достатньо часто конфігурація допускової області формується проектувальниками, виходячи із фізичного змісту задачі. Наприклад, у випадку проектування допусків на параметри створюваної радіоелектронної схеми бажано, щоб конфігурація шуканої оцінки допускової області у найбільшій мірі співпадала із технологічною областю розсіювання значень параметрів радіоелементів цієї схеми від номінальних. По-друге, такий підхід забезпечує спрощення обчислювальних процедур при виборі конфігурації області, а також при знаходженні допускових оцінок у вигляді еліпсоїда. Третьою перевагою такого підходу є можливість ітераційного формування допускової області, коли на початкових етапах проектування незадані всі обмеження на характеристики системи, а доповнюються в процесі проектування чи навіть функціонування системи.

Метою даної роботи є розробка методу обґрунтованого вибору конфігурації області допусків у вигляді багатовимірного еліпсоїда.

Постановка задачі

Припустимо, що структура моделі «вхід–вихід» об'єкта задана лінійним відносно параметрів рівнянням

$$y_0(\vec{x}) = \vec{\phi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{\beta}. \quad (1)$$

Експериментальні дані одержано в інтервальному вигляді:

$$\vec{x}_i, [y_i^-, y_i^+], y_0(\vec{x}_i) \in [y_i^-, y_i^+], i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

де y_i^-, y_i^+ — відповідно нижня і верхня межі інтервалу вихідної змінної, які можуть бути одержані на основі моделей інтервальних похибок для заданих значень вектора $\vec{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{iN_i})^T$ на допустимій множині χ ; ширина інтервалу $[y_i^-, y_i^+]$ задає міру невизначеності стосовно значень вихідної змінної; $y_0(\vec{x}_i)$ — істинне невідоме значення вихідної змінної; $\vec{\phi}^T(\vec{x})$ — відомий вектор базисних функцій; $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)^T$ — невідомий вектор параметрів моделі.

Користуючись структурою моделі та інтервальними даними, одержимо інтервальну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (ІСЛАР) [3]:

$$\begin{cases} y_1^- \leq b_1 \phi_1(\vec{x}_1) + \dots + b_m \phi_m(\vec{x}_1) \leq y_1^+, \\ \vdots \\ y_i^- \leq b_1 \phi_1(\vec{x}_i) + \dots + b_m \phi_m(\vec{x}_i) \leq y_i^+, \\ \vdots \\ y_N^- \leq b_1 \phi_1(\vec{x}_N) + \dots + b_m \phi_m(\vec{x}_N) \leq y_N^+. \end{cases} \quad (3)$$

Для зручності запишемо дану систему в матричному вигляді:

$$F \cdot \vec{b} = [\vec{Y}], \quad (4)$$

де $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$ — вектор оцінок параметрів; $F = \{\phi_j(\vec{x}_i), j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, N\}$ — матриця значень базових функцій у N спостереженнях; $[\vec{Y}] = ([y_1^-, y_1^+], \dots, [y_N^-, y_N^+])$ — інтервальний вектор спостережень «виходу».

Розв'язком цієї ІСЛАР є множина оцінок $\vec{b}$ невідомих значень параметрів $\vec{\beta}$ у такому вигляді:

$$\Omega = \left\{ \vec{b} \in R^m \mid \vec{Y}^- \leq F \cdot \vec{b} \leq \vec{Y}^+ \right\}. \quad (5)$$

Якщо технологічна область розсіювання є невідомою, то задача оцінки області параметрів у загальному випадку ($m \leq N$) є достатньо складною, але її можна спростити за рахунок побудови оцінки області параметрів на основі методів, які базуються на виділенні із ІСЛАР (3) насиченого блоку, тобто m базових рівнянь ІСЛАР. Такий підхід базується на гіпотезі про те, що значну частину рівнянь ІСЛАР формують у просторі параметрів неактивні обмеження, тобто не впливають на її розв'язок.

Найбільшого розвитку вищезазначені методи набули для задач гарантованого оцінювання [1, 2, 5]. Водночас актуальним є застосування методів на основі виділення з ІСЛАР насиченого блоку для побудови допускової оцінки. В цьому випадку суттєвим чином спрощується обчислювальна процедура пошуку багатовимірної еліпсоїдної оцінки.

Схематично отримання допускової еліпсоїдної оцінки на основі насиченого блоку ІСЛАР проілюстровано на рис. 1.

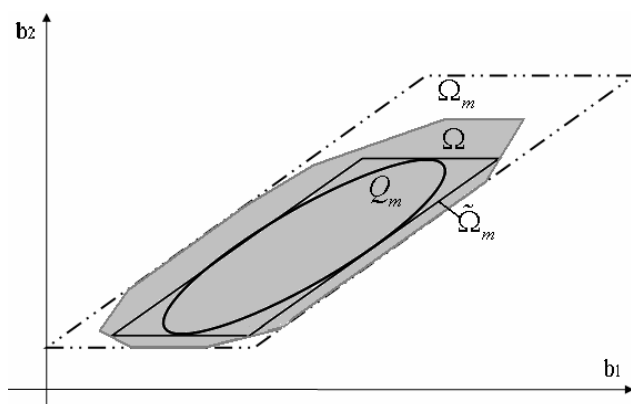


Рис. 1. Ілюстрація допускових оцінок $\tilde{\Omega}_m$ та Q_m на основі виділення насиченого блоку ІСЛАР для випадку $m = 2$

Однак, не знаючи вигляду багатогранника Ω , неможливо визначити в системі (3) m базових рівнянь для побудови гіперпаралелепіпеда $\tilde{\Omega}_m$, який забезпечить найбільше покриття допускової області, $\tilde{\Omega}_m \subseteq \Omega$. Тому, не спираючись на повний аналіз конфігурації допускової області для знаходження базових рівнянь, використовують такі характеристики області розв'язку $\tilde{\Omega}_m$ вибраних m -рівнянь:

а) об'єм m -вимірного паралелепіпеда:

$$I_D = 4^m \cdot \det(E \cdot (F \cdot F^T)^{-1} \cdot E) = 4^m \cdot \left(\prod_{i=1}^m \Delta_i^2 \right) \cdot \det(F \cdot F^T)^{-1}; \quad (6)$$

б) суму діагональних елементів:

$$I_A = 2^{m+1} \cdot Sp(E \cdot (F \cdot F^T)^{-1} \cdot E); \quad (7)$$

в) найбільшу діагональ:

$$I_E = \max_p 4 \cdot \vec{\Delta}_p^T \cdot (F \cdot F^T)^{-1} \cdot \vec{\Delta}_p, \quad (8)$$

де $E = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_m)$ — діагональна матриця інтервальних похибок; $\Delta_i = 0,5 \cdot (y_i^+ - y_i^-)$; $Sp(\cdot)$ — означає слід матриці, який дорівнює сумі її діагональних елементів; $\vec{\Delta}_p^T = (\pm \Delta_1^p, \dots, \pm \Delta_i^p, \dots, \pm \Delta_m^p)$ — вектор, компонентами якого є відповідні інтервальні похибки Δ_i із додатними або від'ємними знаками; $p = 1, \dots, 2^{m-1}$ — номер діагоналі.

Проте вказані характеристики є апіорними і не базуються на аналізі реальної конфігурації області параметрів усієї ІСЛАР, тому їхнє використання не забезпечує максимального покриття допускової області. Враховуючи цей факт, у роботі

запропоновано вибрати конфігурацію допускового еліпсоїда на основі нескладного, з обчислювальної точки зору, аналізу конфігурації реальної допускової області.

Метод формування допускової області

Розглянемо задачу побудови допускової еліпсоїдної оцінки параметрів моделі (1) у такому вигляді:

$$Q_m = \{\vec{b} \in R^m \mid (\vec{b} - \vec{\bar{b}})^T \cdot H \cdot (\vec{b} - \vec{\bar{b}}) \leq r\}, \quad (9)$$

де H — матриця конфігурації m -вимірному еліпсоїда Q_m .

Аналіз реальної допускової області проведемо на основі такої обчислювальної схеми. Спочатку локалізуємо область параметрів (5) прямокутним паралелепіпедом Π^+ : $\Pi^+ = \{\vec{b} \in R^m \mid b_j^- \leq b_j \leq b_j^+, j=1, \dots, m\}$, як це проілюстровано на рис. 2. Для отримання локалізаційного паралелепіпеда розв'язуватимемо $2m$ задач лінійного програмування у вигляді:

$$b_j^- = \min_{\vec{b} \in \Omega} b_j, b_j^+ = \max_{\vec{b} \in \Omega} b_j, \quad j=1, \dots, m. \quad (10)$$

При фіксованому j розв'язком задачі (10) є дві вершини $\vec{b}_{\min}^j, \vec{b}_{\max}^j$ багатогранника Ω , компонента j яких приймає, відповідно, мінімальне $\min b_j$ та максимальне значення $\max b_j$. Якщо $2m$ разів розв'язати задачу (10) для всіх компонент $(b_1, \dots, b_m)$, то будуть знайдені $2m$ вершин $\vec{b}_{\min}^j, \vec{b}_{\max}^j$ багатогранника Ω .

Тоді, маючи $2m$ вершин опуклої області параметрів Ω , можемо зробити висновки про конфігурацію багатогранника Ω . Для цього серед усіх пар вершин $\vec{b}_{\min}^j, \vec{b}_{\max}^j$ знаходимо таку пару $\vec{b}_p, \vec{b}_s$, яка задовольняє розв'язку задачі:

$$l_{ps}^2 = \|\vec{b}_{\max}^j - \vec{b}_{\min}^j\|^2 = (\vec{b}_{\max}^j - \vec{b}_{\min}^j)^T \cdot (\vec{b}_{\max}^j - \vec{b}_{\min}^j) \rightarrow \max, \quad \vec{b}_{\max}^j, \vec{b}_{\min}^j = 1, \dots, 2^m. \quad (11)$$

Задамо умову, щоб найдовша вісь допускового еліпсоїда (9) співпадала з лінією, що проходить через знайденні вершини $\vec{b}_p, \vec{b}_s$, а його центр співпадав із серединою відрізка $[\vec{b}_p, \vec{b}_s]$. Тобто центр допускового еліпсоїда обчислюватимемо за формулою:

$$\vec{\bar{b}} = 0,5(\vec{b}_s + \vec{b}_p). \quad (12)$$

Результат вибору насиченого блоку на основі критерію максимальної довжини найбільшої діагоналі проілюстровано на рис. 2.

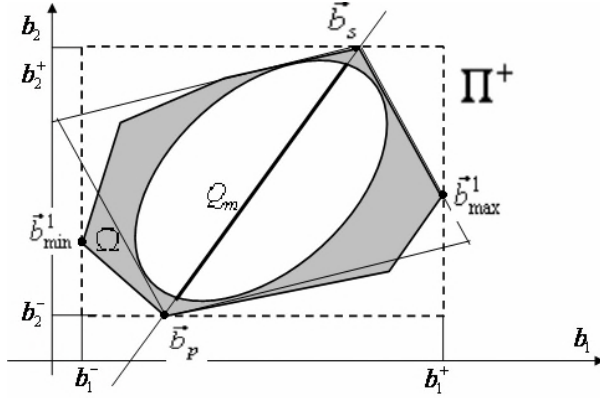


Рис. 2. Ілюстрація побудови еліпсоїдної допускової оцінки області параметрів, конфігурація якої знайдена на основі запропонованого методу, для випадку $m = 2$

Реалізацію цієї умови в повній мірі важко забезпечити в силу високої складності алгоритму побудови такого еліпсоїда, тому використаємо дещо спрощену схему наближеного забезпечення даної умови. Вважатимемо, що знайдені вершини $\vec{b}_p, \vec{b}_s$ відповідають активним обмеженням ІСЛАР (3), на основі яких будуть сформовані базові m -рівнянь для визначення конфігурації допускового еліпсоїда. Тепер формування конфігурації допускового еліпсоїда виконаємо за наступною схемою. Активні обмеження, межі яких визначають вершину $\vec{b}_p$, матимуть вигляд:

$$\begin{cases} y_{p_1}^- \leq \varphi^T(\vec{x}_{p_1}) \cdot \vec{b}, \\ y_{p_2}^- \leq \varphi^T(\vec{x}_{p_2}) \cdot \vec{b}, \\ \vdots \\ y_{p_i}^+ \geq \varphi^T(\vec{x}_{p_i}) \cdot \vec{b}, \\ \vdots \\ y_{p_m}^- \leq \varphi^T(\vec{x}_{p_m}) \cdot \vec{b}, \end{cases} \quad (13)$$

де $p_1, p_2, \dots, p_m = \{1, \dots, N\}$, причому $p_i \neq p_j, i \neq j$.

А активні обмеження, межі яких визначають вершину $\vec{b}_s$, матимуть такий вигляд:

$$\begin{cases} y_{s_1}^+ \geq \varphi^T(\vec{x}_{s_1}) \cdot \vec{b}, \\ y_{s_2}^- \leq \varphi^T(\vec{x}_{s_2}) \cdot \vec{b}, \\ \vdots \\ y_{s_i}^+ \geq \varphi^T(\vec{x}_{s_i}) \cdot \vec{b}, \\ \vdots \\ y_{s_m}^+ \geq \varphi^T(\vec{x}_{s_m}) \cdot \vec{b}, \end{cases} \quad (14)$$

де $s_1, s_2, \dots, s_m = \{1, \dots, N\}$, причому $s_i \neq s_j, i \neq j$.

Доповнимо систему (13) системою обмежень:

$$\begin{cases} y_{p_1}^+ \geq \varphi^T(\vec{x}_{p_1}) \cdot \vec{b}, \\ y_{p_2}^+ \geq \varphi^T(\vec{x}_{p_2}) \cdot \vec{b}, \\ \vdots \\ y_{p_i}^- \leq \varphi^T(\vec{x}_{p_i}) \cdot \vec{b}, \\ \vdots \\ y_{p_m}^+ \geq \varphi^T(\vec{x}_{p_m}) \cdot \vec{b}, \end{cases}, \quad p_1, p_2, \dots, p_m = \{1, \dots, N\}, \quad p_i \neq p_j, i \neq j,$$

де $y_{p_1}^+ = \varphi^T(\vec{x}_{p_1}) \cdot \vec{b}_s, y_{p_2}^+ = \varphi^T(\vec{x}_{p_2}) \cdot \vec{b}_s, \dots, y_{p_i}^- = \varphi^T(\vec{x}_{p_i}) \cdot \vec{b}_s, \dots, y_{p_m}^+ = \varphi^T(\vec{x}_{p_m}) \cdot \vec{b}_s$.

Геометрично, доповнення системи (13) заданою системою, в просторі параметрів означає паралельне перенесення меж активних обмежень у вершину $\vec{b}_s$.

Тоді отримаємо систему обмежень:

$$\begin{cases} y_{p_1}^- \leq \varphi^T(\vec{x}_{p_1}) \cdot \vec{b} \leq y_{p_1}^+, \\ y_{p_2}^- \leq \varphi^T(\vec{x}_{p_2}) \cdot \vec{b} \leq y_{p_2}^+, \\ \vdots \\ y_{p_i}^- \leq \varphi^T(\vec{x}_{p_i}) \cdot \vec{b} \leq y_{p_i}^-, \\ \vdots \\ y_{p_m}^- \leq \varphi^T(\vec{x}_{p_m}) \cdot \vec{b} \leq y_{p_m}^+. \end{cases} \quad (15)$$

Аналогічні доповнення проведемо для системи (14):

$$\begin{cases} y_{s_1}^- \leq \varphi^T(\vec{x}_{s_1}) \cdot \vec{b}, \\ y_{s_2}^- \leq \varphi^T(\vec{x}_{s_2}) \cdot \vec{b}, \\ \vdots \\ y_{s_i}^+ \geq \varphi^T(\vec{x}_{s_i}) \cdot \vec{b}, \\ \vdots \\ y_{s_m}^- \leq \varphi^T(\vec{x}_{s_m}) \cdot \vec{b}, \end{cases}$$

де $y_{s_1}^- = \varphi^T(\vec{x}_{s_1}) \cdot \vec{b}_s, y_{s_2}^- = \varphi^T(\vec{x}_{s_2}) \cdot \vec{b}_p, \dots, y_{s_i}^+ = \varphi^T(\vec{x}_{s_i}) \cdot \vec{b}_p, \dots, y_{s_m}^- = \varphi^T(\vec{x}_{s_m}) \cdot \vec{b}_p$.

У результаті одержимо таку систему:

$$\begin{cases} y_{s_1}^- \leq \varphi^T(\vec{x}_{s_1}) \cdot \vec{b} \leq y_{s_1}^+, \\ y_{s_2}^- \leq \varphi^T(\vec{x}_{s_2}) \cdot \vec{b} \leq y_{s_2}^+, \\ \vdots \\ y_{s_i}^- \leq \varphi^T(\vec{x}_{s_i}) \cdot \vec{b} \leq y_{s_i}^+, \\ \vdots \\ y_{s_m}^- \leq \varphi^T(\vec{x}_{p_m}) \cdot \vec{b} \leq y_{s_m}^+. \end{cases} \quad (16)$$

Як відомо [4] розв'язком систем (15) і (16) в області параметрів є m -вимірні паралелепіеди, відповідно Ω_p та Ω_s у просторі параметрів. Їхні оптимальні еліпсоїдні допускові оцінки (максимального об'єму) задаватимемо в такому вигляді [3]:

$$Q_m^p = \left\{ \vec{b} \in R^m \mid (\vec{b} - \vec{\bar{b}}_p) \cdot H_p \cdot (\vec{b} - \vec{\bar{b}}_p)^T \leq 1 \right\}, \quad (17)$$

$$Q_m^s = \left\{ \vec{b} \in R^m \mid (\vec{b} - \vec{\bar{b}}_s) \cdot H_s \cdot (\vec{b} - \vec{\bar{b}}_s)^T \leq 1 \right\}, \quad (18)$$

де $\vec{\bar{b}}_p = \vec{\bar{b}}_s$ — центр еліпсоїда, що співпадає з серединою відрізка, що з'єднує вершини $\vec{b}_p$ і $\vec{b}_s$;

$H_p = F_p^T \cdot E_p^{-2} \cdot F_p$, $H_s = F_s^T \cdot E_s^{-2} \cdot F_s$ — матриці конфігурацій еліпсоїдів Q_m^p , Q_m^s відповідно;

$$E_p = \text{diag}\{0,5(y_{p_1}^+ - y_{p_1}^-), \dots, 0,5(y_{p_i}^+ - y_{p_i}^-), \dots, 0,5(y_{p_m}^+ - y_{p_m}^-)\};$$

$$E_s = \text{diag}\{0,5(y_{s_1}^+ - y_{s_1}^-), \dots, 0,5(y_{s_i}^+ - y_{s_i}^-), \dots, 0,5(y_{s_m}^+ - y_{s_m}^-)\} \text{ — діагональні матриці}$$

ширини гарантованих інтервалів вихідних змінних;

F_p , F_s — матриці значень базових функцій моделі систем (15) і (16) відповідно.

Причому, багатовимірні еліпсоїди Q_m^p та Q_m^s , задані формулами (17), (18), дотикаються до центрів граней m -вимірних паралелепіедів Ω_p та Ω_s відповідно.

У результаті реалізації запропонованої схеми та для забезпечення максимального покриття допусковою еліпсоїдною оцінкою області параметрів, матрицю конфігурації допускового еліпсоїда (9) знаходимо з умови:

$$H = \begin{cases} F_p^T \cdot E_p^{-2} \cdot F_p, & \text{якщо } V(Q_m^p) \geq V(Q_m^s) \\ F_s^T \cdot E_s^{-2} \cdot F_s, & \text{якщо } V(Q_m^p) < V(Q_m^s) \end{cases}, \quad (19)$$

де

$$V(Q_m^s) = \det(F_s^T \cdot E_s^{-2} \cdot F_s), \quad (20)$$

$$V(Q_m^p) = \det(F_p^T \cdot E_p^{-2} \cdot F_p) \quad (21)$$

— величини пропорційні об'ємам еліпсоїдів Q_m^s та Q_m^p відповідно.

Таким чином, запропонована схема дозволяє знайти конфігурацію еліпсоїда, найдовша вісь якого орієнтована в напрямку, що відповідає найбільшому видовженню реальної допускової області.

Збільшити покриття допусковим еліпсоїдом реальної області параметрів можна введенням у формулу для знаходження матриці конфігурації $H_p(H_s)$ додаткового множника у вигляді матриці:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \Lambda_{1i} & \cdots & \Lambda_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{i1} & \cdots & 1 & \cdots & \Lambda_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{m1} & \cdots & \Lambda_{mi} & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{де } \Lambda_{ji} = \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \lambda_s^i \cdot \frac{\Delta_j^s}{\Delta_j}, \quad \Delta_j^s \in \{-\Delta_j, \Delta_j\}, \quad j=1, \dots, m, \quad \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \lambda_s^i = 1, \quad i=1, \dots, m;$$

$\Delta_i = 0,5 \cdot (y_i^+ - y_i^-)$, $i=1, \dots, m$ — відхилення вихідних характеристик, яке задає відстань від центру $\vec{b}$ до площини, якій належить i -та грань многогранника Ω_m .

Тоді формула (19) матиме такий вигляд:

$$H = \begin{cases} F_p^T \cdot E_p^{-1} \cdot \Lambda_p \cdot E_p^{-1} \cdot F_p, & \text{якщо } V(Q_m^p) \geq V(Q_m^s), \\ F_s^T \cdot E_s^{-1} \cdot \Lambda_s \cdot E_s^{-1} \cdot F_s, & \text{якщо } V(Q_m^p) < V(Q_m^s). \end{cases} \quad (22)$$

Введення додатково множника у вигляді матриці Λ дозволяє побудувати допусковий еліпсоїд у такий спосіб, щоб максимально наблизити його до реальної області параметрів і таким чином максимізувати допуски за рахунок зміщення точок дотику еліпсоїда і паралелепіпеда від центрів ваги граней.

Представимо запропоновану схему вибору конфігурації та центру допускової еліпсоїдної оцінки у вигляді алгоритму.

Вихідними для алгоритму є ІСЛАР (3). Результатом — матриця конфігурації еліпсоїда (9) та його центр $\vec{b}$.

Крок 1. Пошук $2m$ вершин $\vec{b}_{\min}^j, \vec{b}_{\max}^j$ реального многогранника Ω на основі розв'язування задач лінійного програмування (10).

Крок 2. Пошук найбільш віддалених вершин $\vec{b}_p$ та $\vec{b}_s$ із розв'язку (11).

Крок 3. Формування систем (13) і (14).

Крок 4. Доповнення систем активних обмежень (13) і (14), що задають вершини $\vec{b}_p$ та $\vec{b}_s$ до систем (15) і (16).

Крок 5. Обчислення об'ємів еліпсоїдів (17) і (18) за формулами (20), (21).

Крок 6. Вибір матриці конфігурації еліпсоїда (9) за формулами (19).

Крок 7. Обчислення центру еліпсоїда (9) за формулою (12).

Приклад

Для оцінки обґрунтованості запропонованого методу формування конфігурації області параметрів розглянемо приклад.

Нехай система інтервальних рівнянь має такий вигляд:

$$\begin{cases} 0,78 \leq 1,5 \cdot b_1 + 0,75 \cdot b_2 \leq 0,84, \\ 0,80 \leq 0,8 \cdot b_1 + 2,8 \cdot b_2 \leq 0,89, \\ 0,73 \leq 1,2 \cdot b_1 + 1,36 \cdot b_2 \leq 0,79, \\ 0,71 \leq 2,0 \cdot b_1 - 1,00 \cdot b_2 \leq 0,78. \end{cases} \quad (23)$$

Крок 1. Дану систему $m \times N$, де $m = 2$, $N = 4$, перетворимо до системи $2N$ нерівностей такого вигляду:

$$\begin{cases} 0,78 \leq 1,5 \cdot b_1 + 0,75 \cdot b_2, \\ 1,5 \cdot b_1 + 0,75 \cdot b_2 \leq 0,84, \\ 0,80 \leq 0,8 \cdot b_1 + 2,8 \cdot b_2, \\ 0,8 \cdot b_1 + 2,8 \cdot b_2 \leq 0,89, \\ 0,73 \leq 1,2 \cdot b_1 + 1,36 \cdot b_2, \\ 1,2 \cdot b_1 + 1,36 \cdot b_2 \leq 0,79, \\ 0,71 \leq 2,0 \cdot b_1 - 1,00 \cdot b_2, \\ 2,0 \cdot b_1 - 1,00 \cdot b_2 \leq 0,78. \end{cases} \quad (24)$$

Розв'язавши $2m$ задач лінійного програмування (10), знайдемо $b_1^- = 0,438$; $b_1^+ = 0,472$; $b_2^- = 0,153$; $b_2^+ = 0,186$ і отримаємо $2m$ екстремальних вершин: $B_1(0,438; 0,165)$; $B_2(0,472; 0,164)$; $B_3(0,466; 0,153)$; $B_4(0,448; 0,186)$.

Крок 2. На основі (11) знайдемо вершини, які утворюють найбільшу діагональ — B_3 та B_4 . Вершина B_3 лежить на перетині меж півпросторів заданих третьою та восьмою нерівностями системи (24), тобто такою системою (14):

$$\begin{cases} 0,80 \leq 0,8 \cdot b_1 + 2,8 \cdot b_2, \\ 2,0 \cdot b_1 - 1,00 \cdot b_2 \leq 0,78. \end{cases}$$

Крок 3. Доповнимо дану систему до системи виду (14), для цього знайдемо

$$\begin{aligned} y_{p_1}^+ &= (0,8; 2,8) \cdot B_4 = (0,8; 2,8) \cdot (0,448; 0,186)^T = 0,88, \\ y_{p_2}^- &= (2; -1) \cdot B_4 = (2; -1) \cdot (0,448; 0,186)^T = 0,71. \end{aligned}$$

Крок 4. У результаті отримаємо систему такого вигляду:

$$\begin{cases} 0,80 \leq 0,8 \cdot b_1 + 2,8 \cdot b_2 \leq 0,88, \\ 0,71 \leq 2,0 \cdot b_1 - 1,00 \cdot b_2 \leq 0,78. \end{cases} \quad (25)$$

Вершина B_4 — на перетині меж шостої та сьомої нерівностей системи (24):

$$\begin{cases} 1,2 \cdot b_1 + 1,36 \cdot b_2 \leq 0,79, \\ 0,71 \leq 2,0 \cdot b_1 - 1,00 \cdot b_2. \end{cases}$$

Крок 5. Знайшовши $y_{s_1}^- = (1,2; 1,36) \cdot B_3 = (1,2; 1,36) \cdot (0,466; 0,153)^T = 0,77$ та $y_{s_2}^+ = (2; -1) \cdot B_3 = (2; -1) \cdot (0,466; 0,153)^T = 0,78$, отримаємо таку систему (14):

$$\begin{cases} 0,77 \leq 1,2 \cdot b_1 + 1,36 \cdot b_2 \leq 0,79, \\ 0,71 \leq 2,0 \cdot b_1 - 1,00 \cdot b_2 \leq 0,78. \end{cases} \quad (26)$$

Крок 6. На основі формули (19) знайдемо матрицю конфігурації допускового еліпсоїда

$$H = \begin{pmatrix} 916,3 & -58,2 \\ -58,2 & 1429,1 \end{pmatrix},$$

що відповідає системі обмежень (25).

Крок 7. Знайдемо центр еліпсоїда за формулою (12):

$$\bar{\vec{b}} = \frac{1}{2}(\vec{b}_4 + \vec{b}_3) = (0,4570; 0,1695).$$

Ілюстрація процедури пошуку конфігурації допускової еліпсоїдної оцінки зображена на рис. 3.

Об'єм отриманої допускової області у вигляді еліпсоїда, знайденого на основі запропонованого методу пошуку конфігурації, дорівнює $V = 9,163 \cdot 10^{-4}$.

Розглянемо інші варіанти формування допускової області, зокрема, випадок, коли допускова еліпсоїдна оцінка області параметрів побудована так, що її вісь орієнтується в напрямку не

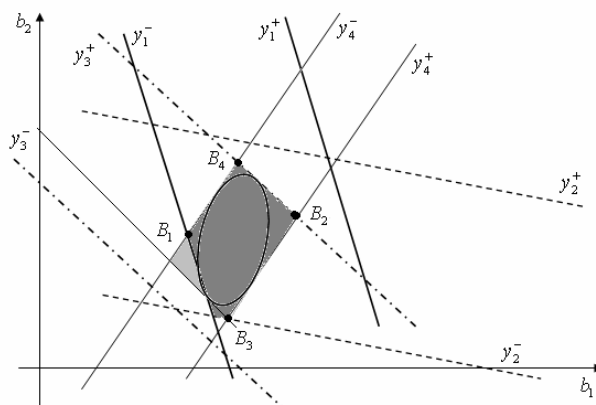


Рис. 3. Ілюстрація допускової еліпсоїдної оцінки

найбільшої діагоналі, тобто не виконується умова (11). У результаті отримаємо область, об'єм якої $V = 7,592 \cdot 10^{-4}$, менший від об'єму області, отриманої на основі запропонованого методу, і складає 82 %.

Тепер перевіримо використання формули (19), зокрема, замість запропонованої конфігурації виберемо іншу, що суперечить умові $V(Q^p) > V(Q^s)$. У результаті отримаємо еліпсоїд, об'єм якого $V = 7,4 \cdot 10^{-4}$, що також менший від об'єму еліпсоїда, отриманого на основі запропонованого методу, та складає 80 %.

Висновки

Розглянуто задачу формування допускової еліпсоїдної оцінки параметрів інтервальних моделей на основі аналізу інтервальних даних. У процесі розв'язання задачі отримано такі нові наукові та практичні результати:

1) встановлено, що задача допускового оцінювання параметрів інтервальних моделей за критерієм максимального покриття та мінімізації обчислювальної складності є складною обчислювальною задачею, рішення якої передбачає формування конфігурації допускової області у вигляді елементів квадратної матриці конфігурації еліпсоїда;

2) уперше на основі багаторазового розв'язування задач лінійного програмування запропоновано обчислювальну процедуру для дослідження реальної конфігурації допускової області, яка дозволяє визначити орієнтацію найдовшої осі та центру багатовимірного допускового еліпсоїда;

3) запропоновано метод та алгоритм формування допускової еліпсоїдної багатовимірної оцінки, який на відміну від існуючих, відрізняється невисокою обчислювальною складністю і базується на процедурах лінійного програмування. Реалізацію методу проведено на конкретному прикладі та підтверджено ефективність його використання.

1. Бакан Г.М. Теоретико-множественная идентификация линейных объектов в классе размытых эллипсоидальных множеств / Г.М. Бакан, Н.Н. Куссиль // Автоматика. — 1990. — № 4. — С. 72–78.

2. Лычак М.М. Идентификация и оценивание состояния объектов управления на основе множественного подхода / М.М. Лычак // Проблемы управления и информатики. — 1999. — № 5. — С. 34–41.

3. Дивак М.П. Допустиме оцінювання області параметрів радіоелектронних кіл в класі еліпсоїдів / М.П. Дивак // Теоретична електротехніка. — 2002. — Вып. № 56. — С. 113–122.

4. Шарый С.П. Решение интервальной линейной задачи о допусках / С.П. Шарый // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 10. — С. 147–162.

5. Дивак М. П. Метод локалізації гарантованих оцінок в задачах параметричної ідентифікації / М.П. Дивак // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. — 2000. — № 4. — С. 12–17.

Надійшла до редакції 28.04.2009