УДК 519.6

ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ ІНТЕРВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ ТА МЕТОДУ ЇЇ РОЗВ'ЯЗКУ В ЗАДАЧАХ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЛІНІЙНОГО ІНТЕРВАЛЬНОГО РІЗНИЦЕВОГО ОПЕРАТОРА

Дивак М.П., Дивак Т.М.

Тернопільський національний економічний університет

mdy@tneu.edu.ua, dtaras80@mail.ru.

В статті розглянуто задачу ідентифікації лінійного інтервального різницевого оператора. Показано, що дана задача є задачею розв'язування інтервальної системи нелінійних алгебричних рівнянь. Досліджено властивості розв'язків таких систем та запропоновано підходи до побудови алгоритмів їх розв'язування.
Ключові слова: інтервальний аналіз, різницевий оператор, інтервальні нелінійні рівняння

The task of identification of linear interval difference functional is considered. This is the task of solving of interval system of nonlinear algebraic equations is proofed. Properties of solutions of this system and approaches for designing of algorithms of its solving are researched.
Keywords: interval analysis; difference functional; interval nonlinear equations.

В статье рассмотрено задачу идентификации линейного интервального разностного оператора. Показано, что данная задача есть задачей решения интервальной системы нелинейных алгебраических уравнений. Исследованы свойства решений таких систем и предложены подходы к построению алгоритмов их решения.
Ключевые слова: интервальный анализ, разностный оператор, интервальные нелинейные уравнения.

Вступ

Для дослідження широкого класу систем та процесів достатньо часто використовують методи макромоделювання у вигляді різницевих операторів. Одною із таких задач є макромоделювання полів концентрацій шкідливих викидів автотранспорту, теплогенеруючих та промислових об'єктів [1,2]. У цьому випадку доводиться знаходити параметри різницевого оператора, користуючись експериментальними даними, отриманими із застосуванням спектроаналізаторів хімічних речовин. Похибки спектроаналізаторів, які широко використовують для вимірювання цих речовин санітарно-епідеміологічні станції, суттєвим чином перевищують випадкові похибки і сягають 30%, тобто є визначальними при моделюванні. В цих випадках доцільно розглядати похибки в експериментальних даних обмеженими за амплітудою, а самі дані представляти в інтервальному вигляді [3]. Інтервальна форма представлення експериментальних даних в задачі ідентифікації різницевого оператора вимагає знаходження його параметрів у такий спосіб, щоб забезпечити включення прогнозованих значень у відповідний інтервал експериментальних даних для заданих початкових умов. Такого типу задачі розглянуті у працях [3-5]. Проте, наведені у вказаних працях методи ідентифікації параметрів різницевого оператора не враховують початкових інтервальних наближень дискретних значень прогнозованої змінної і базуються на розв'язуванні інтервальних систем лінійних алгебричних рівнянь, складених із використанням заданої структури різницевого оператора та експериментальних даних. Складені у такий спосіб ІСЛАР часто не сумісні, а забезпечити їх сумісність можливо через невиправдано суттєве ускладнення структури різницевого оператора. В цьому випадку задача ідентифікації інтервального різницевого оператора не може бути розв'язаною. Розв'язок даної актуальної задачі слід шукати не в ускладненні структури різницевого оператора, а у включенні безпосередньо в ІСЛАР інтервальних рівнянь, складених на основі інтервально заданих наближень початкових дискретних значень прогнозованої характеристики. Предметом розгляду даної статті є саме такий підхід.

Постановка задачі

Розглянемо лінійний різницевий оператор, який описують у такому загальному вигляді:

$$v_{j+1,k+1} = \vec{g}^T \cdot \vec{f}(v_{0,0},...,v_{0,k},v_{1,0},...,v_{1,k},...,v_{j,k},x,y,z,\vec{u}_0,...,\vec{u}_k,\vec{\alpha}) \;\; k=0,...,N-1, \;\; j=0,...,L-1, \quad (1)$$

де $\vec{f}(v_{0,0},...,v_{0,k},v_{1,0},...,v_{1,k},...,v_{j,k},x,y,z,\vec{u}_0,...,\vec{u}_k,\vec{\alpha})$ - відомий вектор (розмірністю $m\times 1$) базисних функцій, що задає структуру різницевого оператора; $v_{j+1,k+1}$ - прогнозована характеристика в j+1 точці простору в $k+1$ момент часу; x,y,z - координати простору; $\vec{u}_k = (u_{1,0},...,u_{p,0},u_{1,1},...,u_{p,k})^T$ - відомий вектор (розмірністю $p\times 1$) вхідних змінних в k-й дискретний момент часу; $\vec{\alpha} = (\alpha_1,...,\alpha_s)^T$ - відомий вектор (розмірністю $s\times 1$), що характеризує параметри середовища; $\vec{g}$ - невідомий вектор (розмірністю $m\times 1$) параметрів різницевого оператора. Слід зазначити, що в загальному випадку базисні функції різницевого оператора можуть бути залежними від $k=0,...,N-1,\; j=0,...,L-1$ значень $v_{j,k}$ прогнозованої характеристики. Проте на практиці кількість цих значень є набагато меншою ніж загальна кількість часових та просторових дискет.

Для оцінювання вектора параметрів $\vec{g}$ різницевого оператора використовують результати вимірювань для заданих координат простору x,y,z, значень вектора вхідних (управляючих) змінних $\vec{u}_k$, вектора параметрів середовища $\vec{\alpha} = (\alpha_1,...,\alpha_s)^T$

$$\tilde{v}_{j,k} = c_{j,k}\cdot v_{j,k} + e_{j,k},\;\; k=0,...,N-1,\;\; j=0,...,L-1, \quad (2)$$

де $\tilde{v}_{j,k}$ - виміряне значення прогнозованої характеристики в j точці простору в k момент часу; $c_{j,k}$ - відомий коефіцієнт, який визначає особливості вимірювального пристрою. У формулі (2) приймаємо: $e_{j,k}$ - випадкові обмежені за амплітудою похибки

$$|e_{1k}| = |e_{2k}| = ... = |e_{jk}| = |e_k| \le \Delta_k,\; \Delta_k > 0 \quad \forall\; k=0,...,N-1, \quad (3)$$

які в загальному випадку залежать від координат простору та часу вимірювань.

Приклад застосування різницевого оператора у загальному вигляді (1) для моделювання поширення концентрацій угарного газу наведений у праці [3].

Із використанням моделі вимірювань (2) та урахуванням обмеженості за амплітудою похибки (3), експериментальні дані набувають інтервального представлення

$$[v_{j,k}]=[v^-_{j,k};v^+_{j,k}]=[(\tilde{v}_{j,k}-\Delta_k);(\tilde{v}_{j,k}+\Delta_k)]/c_{j,k},\ k=0,...,N-1,\ j=0,...,L-1, \qquad (4)$$

де $[v^-_{j,k};v^+_{j,k}], v^-_{j,k};v^+_{j,k}$ - гарантований інтервал, нижнє та верхне значення виміряної величини, відповідно. Зауважимо, що обчислення у виразі (4) виконуються у відповідності з правилами інтервальної арифметики [6].

Як було зазначено вище, невідомий вектор параметрів $\vec{g}$ різницевого оператора будемо оцінювати за умовами включення прогнозованих значень у відповідний інтервал експериментальних даних. Вказані умови мають такий формальний запис:

$$[\hat{v}_{j+1,k+1}]=[\hat{v}^-_{j+1,k+1};\hat{v}^+_{j+1,k+1}]\subseteq[v_{j+1,k+1}]=[v^-_{j+1,k+1};v^+_{j+1,k+1}],\ k=0,...,N-1,\ j=0,...,L-1, \qquad (5)$$

де $[\hat{v}_{j+1,k+1}]=[\hat{v}^-_{j+1,k+1};\hat{v}^+_{j+1,k+1}]$- прогнозований інтервал в загальному випадку розраховуватимемо за формулою

$$[\hat{v}_{j+1,k+1}]=\hat{\vec{g}}^T\times\vec{f}([\hat{v}_{0,0}],...[\hat{v}_{0,k}],[\hat{v}_{1,0}],...[\hat{v}_{1,k}],...[\hat{v}_{j,k}],x,y,z,\vec{u}_0,...,\vec{u}_k,\vec{\alpha}),\ k=0,...,N-1,$$
$$j=0,...,L-1. \qquad (6)$$

У формулі (6) $\hat{\vec{g}}$ означає вектор оцінок параметрів різницевого оператора, які отримуватимемо із умов включення (5), а $[\hat{v}_{0,0}],...[\hat{v}_{0,k}],[\hat{v}_{1,0}],...[\hat{v}_{1,k}],...[\hat{v}_{j,k}]$- є задані чи розраховані інтервальні оцінки початкових дискретних значень прогнозованої характеристики.

Оскільки для отримання інтервалу прогнозованої характеристики $[\hat{v}_{j+1,k+1}]$ за формулою різницевого оператора (6) необхідно проводити обчислення за правилами інтервальної арифметики [6], то такий оператор називатимемо інтервальним лінійним різницевим оператором.

Підставляючи інтервальні оцінки $[\hat{v}_{j+1,k+1}]$, обчислені за формулою (6) за наявності початкових наближень $[\hat{v}_{0,0}],...[\hat{v}_{0,k}],[\hat{v}_{1,0}],...[\hat{v}_{1,k}],...[\hat{v}_{j,k}]$, у вирази (5) отримаємо таку інтервальну систему алгебричних рівнянь

$$v^-_{j+1,k+1}\le\hat{\vec{g}}^T\times\vec{f}([\hat{v}_{0,0}],...[\hat{v}_{0,k}],[\hat{v}_{1,0}],...[\hat{v}_{1,k}],...[\hat{v}_{j,k}],x,y,z,\vec{u}_0,...,\vec{u}_k,\vec{\alpha})\le v^+_{j+1,k+1},$$
$$k=0,...,N-1,\ j=0,...,L-1. \qquad (7)$$

Отже задача ідентифікації параметрів інтервального лінійного різницевого оператора (6) за умов (5) є задачею розв'язування інтервальної системи алгебричних рівнянь у вигляді (7).

Особливості побудови інтервальної системи алгебричних рівнянь та властивості її розв'язку

Основною проблемою при формуванні системи (7) є неможливість розрахувати інтервальні оцінки $[\hat{v}_{0,0}],...[\hat{v}_{0,k}],[\hat{v}_{1,0}],...[\hat{v}_{1,k}],...[\hat{v}_{j,k}]$ (за виключенням початково заданих) без наявних оцінок параметрів $\hat{\vec{g}}^T$. В цих умовах доцільно використати рекурентну схему формування інтервальної системи алгебричних рівнянь (7), дослідити властивості її розв'язків і на цій основі розробити алгоритм параметричної ідентифікації різницевого оператора (6) чи обґрунтувати застосування для розв'язування цієї задачі відомі в інтервальному аналізі методи знаходження розв'язків інтервальних систем алгебричних рівнянь.

На практиці достатньо часто використовують простіші різницеві оператори, аніж оператор загального виду (6). Так для прогнозування концентрацій шкідливих викидів автотранспорту достатньо часто використовують різницевий оператор у фіксованій точці простору із часовими дискретами, або різницеві оператори, що описують зміни концентрацій по одній із координат, наприклад перпендикулярно до дороги [1]. Тому для ілюстрації рекурентної схеми формування системи (7) не порушуючи загальності використаємо різницевий оператор із фіксованими координатами простору у вигляді

$$[\hat{v}_{k+1}] = \hat{\vec{g}}^T \times \vec{f}([\hat{v}_{k-1}],[\hat{v}_k],\vec{u}_k,\vec{\alpha}),\ k = 0,...,N-1. \qquad (8)$$

Як бачимо, для отримання прогнозу на основі різницевого оператора (8) необхідно на початку задати інтервальні оцінки $[\hat{v}_0],[\hat{v}_1]$ значень прогнозованої характеристики у такий спосіб: $v_0^- \le [\hat{v}_0] \le v_0^+, v_1^- \le [\hat{v}_1] \le v_1^+$.

Розглянемо тепер послідовність формування рівнянь інтервальної системи. Перше, друге та третє рівняння цієї системи матимуть такий вигляд:

$$v_0^- \le [\hat{v}_0] \le v_0^+$$

$$v_1^- \le [\hat{v}_1] \le v_1^+$$

$$v_2^- \le \hat{\vec{g}}^T \times \vec{f}([\hat{v}_0],[\hat{v}_1],\vec{u}_1,\vec{\alpha}) \le v_2^+.$$

Для отримання четвертого рівняння використаємо вектор базисних функцій $\vec{f}([\hat{v}_1],[\hat{v}_2],\vec{u}_2,\vec{\alpha})$ із заміною невідомого $[\hat{v}_2]$ на обчислене за виразом

$$[\hat{v}_2] = \hat{\vec{g}}^T \times \vec{f}([\hat{v}_0],[\hat{v}_1],\vec{u}_1,\vec{\alpha}).$$

В результаті отримаємо

$$v_3^- \le \hat{\vec{g}}^T \times \vec{f}\left([\hat{v}_1], (\hat{\vec{g}}^T \times \vec{f}([\hat{v}_0],[\hat{v}_1],\vec{u}_1,\vec{\alpha})), \vec{u}_2, \vec{\alpha} \right) \le v_3^+.$$

Четверте рівняння матиме такий вигляд:

$$v_4^- \le \hat{\vec{g}}^T \times \vec{f}\Big((\hat{\vec{g}}^T \times \vec{f}([\hat{v}_0],[\hat{v}_1],\vec{u}_1,\vec{\alpha})),(\hat{\vec{g}}^T \times \vec{f}\big([\hat{v}_1],(\hat{\vec{g}}^T \times \vec{f}([\hat{v}_0],[\hat{v}_1],\vec{u}_1,\vec{\alpha})),\vec{u}_2,\vec{\alpha}\big),\vec{u}_3,\vec{\alpha} \Big) \le v_4^+$$

Продовжуючи описану вище рекурентну схему приходимо до інтервальної системи нелінійних алгебричних рівнянь (ІСНАР). Властивості таких систем описані в інтервальному аналізі [7]. Зокрема відомо, що в загальному випадку розв'язком ІСНАР є не опукла область, що виключає можливість використання методів розв'язування задач лінійного програмування для знаходження інтервальних оцінок розв'язків.

Проілюструємо цей факт на даних прикладу, наведеного у праці [3]. У вказаній праці розглянуто модель поширення концентрацій окису вуглецю CO перпендикулярно до дороги внаслідок рівномірного руху транспорту з постійною потужністю викидів. Структура різницевого оператора в даному випадку має такий вигляд:

$$v_{j+1} = g_1 \cdot v_j + g_2 \cdot (v_{j-1} - v_j), \; j = 1,\ldots, L-1. \qquad (9)$$

Для ілюстрації побудови ІСНАР використаємо перші чотири інтервальні вимірювання, представлені в [3, таблиця 1.]

Таблиця 1.

Інтервальні дані вимірювань концентрацій шкідливих викидів

№ дискрети	Відстань від дороги	Інтервальні значення концентрації СО
j	x_j, м	$[v_j]=[v_j^-;v_j^+]$, мг/м^3
1	0	[49,5;60,5]
2	10	[42,3;51,7]
3	20	[38,7;47,3]
4	30	[33,3;40,7]

Користуючись наведеною вище рекурентною схемою сформуємо систему інтервальних рівнянь.

$$\begin{cases} 49.5 \le [52.25;57.75] \le 60.5 \\ 42.3 \le [44.65;49.35] \le 51.7 \\ 38.7 \le g_1[44.65;49.35] + g_2[2.89;13.10] \le 47.3 \\ 33.3 \le g_1^2[44.65;49.35] + g_1 g_2[-46.46;-31.54] + g_2[44.65;49.35] - g_2^2[2.89;13.10] \le 40.7 \end{cases} \qquad (10)$$

На рис.1 графічно представлено активні обмеження ІСНАР (10) та область оцінок параметрів різницевого оператора (9), яку вони визначають, тобто графічний розв'язок ІСНАР (10). Слід зауважити неймовірно високу складність побудови графічного розв'язку цієї системи. Для знаходження області розв'язків тільки одного нелінійного рівняння цієї ІСНАР довелося скласти 64 обмеження і розв'язати таку ж кількість квадратних рівнянь!

Як видно, область оцінок параметрів різницевого оператора є не опуклою, що суттєво ускладнює задачу ідентифікації параметрів.

На рис.2 співставлено область розв'язків лінійного інтервального рівняння ІСНАР (10) у вигляді

$$38.7 \le g_1[44.65;49.35] + g_2[2.89;13.10] \le 47.3$$

із загальним розв'язком усієї ІСНАР. У загальному випадку при ідентифікації інтервального лінійного різницевого оператора такого типу лінійне інтервальне рівняння завжди буде у складі ІСНАР. Тому для оцінки області його розв'язків, чи одного розв'язку можна використати процедури лінійного програмування.

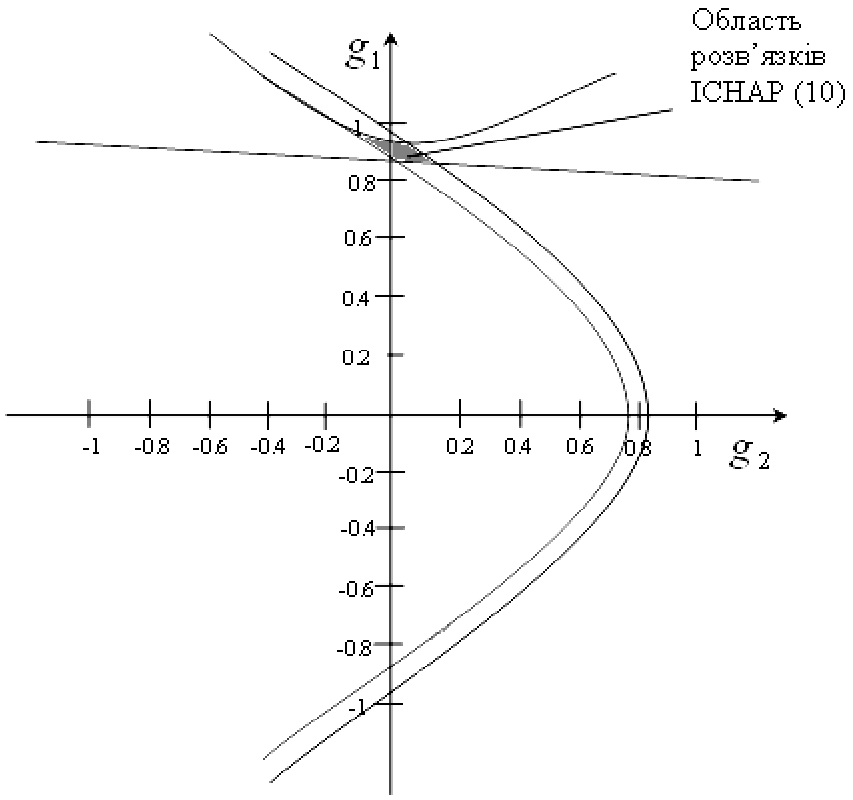

Рис.1. Область розв'язків ІСНАР (10)

Як видно із рис. 2 область розв'язків цього лінійного інтервального рівняння завжди буде включати область розв'язків усієї ІСНАР. Тому один із розв'язків цього лінійного інтервального рівняння може слугувати початковим наближенням вектора оцінок $\hat{\hat{g}}_0$ параметрів різницевого оператора в обчислювальних процедурах його ідентифікації.

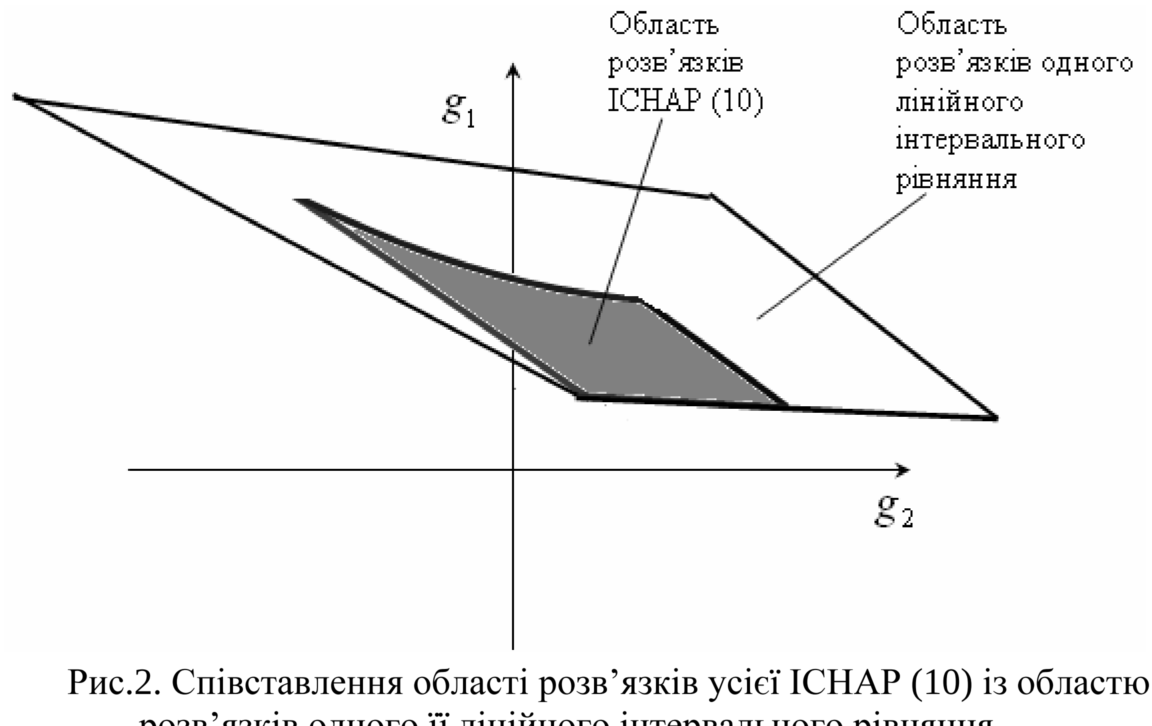

Рис.2. Співставлення області розв'язків усієї ІСНАР (10) із областю розв'язків одного її лінійного інтервального рівняння.

Із проведеного аналізу можна зробити такі висновки:

1) задача параметричної ідентифікації лінійного інтервального різницевого оператора із урахуванням початкових умов у вигляді інтервально заданих наближень початкових дискретних значень прогнозованої характеристики є задачею розв’язку інтервальної системи нелінійних алгебричних рівнянь;
2) розв’язком цієї задачі є не опукла область оцінок параметрів інтервального лінійного різницевого оператора;
3) актуальним є аналіз можливих обчислювальних схем для розв’язування вказаної задачі.

Аналіз можливих обчислювальних схем параметричної ідентифікації лінійного інтервального різницевого оператора

Одним із підходів, який можна застосувати для розв’язування задачі параметричної ідентифікації інтервального різницевого оператора є використання методів нелінійного програмування із лінійною цільовою функцією $g_j \to \min(\max)$ за обмежень заданих ІСНАР. Проте методи нелінійного програмування у випадку великої кількості обмежень відзначаються надзвичайно високою обчислювальною складністю. До того ж для розв’язування задачі параметричної ідентифікації відомими чисельними методами нелінійного програмування і їх програмними реалізаціями необхідно в аналітичному вигляді сформувати систему обмежень у вигляді ІСНАР. Як видно із вище розглянутої рекурентної схеми формування ІСНАР для великої кількості інтервальних даних це стає не реальним.

За цих умов доцільно будувати обчислювальну схему параметричної ідентифікації інтервального різницевого оператора із урахуванням розглянутої рекурентної схеми введення обмежень на параметри із заміною перевірки цих обмежень чисельними методами. Зокрема, можливим є використання ітераційних трьох крокових обчислювальних процедур за такою схемою:

1) задання початкових умов у вигляді інтервальних наближень початкових дискретних значень прогнозованої характеристики із виконанням відомих умов включення (5);
2) задання початкової $\hat{\vec{g}}_0$ чи формування поточної оцінки $\hat{\vec{g}}$ вектора параметрів різницевого оператора;
3) реалізація рекурентної схеми з метою отримання інтервальних дискретних оцінок прогнозованої характеристики та перевірки «якості» поточної оцінки вектора параметрів різницевого оператора.

Спираючись на результати проведеного аналізу властивостей області розв’язків ІСНАР, виглядає обґрунтованим задання початкової оцінки $\hat{\vec{g}}_0$ вектора параметрів різницевого оператора із використанням одного розв’язку лінійного інтервального рівняння ІСНАР у загальному вигляді

$$v_2^- \le \hat{\vec{g}}^T \times \vec{f}([\hat{v}_0],[\hat{v}_1],\vec{u}_1,\vec{\alpha}) \le v_2^+ . \qquad (11)$$

Як відомо [7], розв'язком такого інтервального рівняння є опукла множина. Тому початкове наближення оцінки $\hat{\vec{g}}_0$ можна отримати із розв'язку задачі лінійного програмування

$$g_j \to \min(\max)$$

за обмежень

$$v_2^- \le \hat{\vec{g}}^T \times \vec{f}([\hat{v}_0],[\hat{v}_1],\vec{u}_1,\vec{\alpha}) \le v_2^+ .$$

Поточна оцінка вектора параметрів буде задовільною, коли чисельно побудована ІСНАР буде сумісною, тобто, коли будуть виконуватися усі умови включення (5).

Загалом, запропонований алгоритм відзначатиметься NP- складністю. Для зниження його складності необхідно вводити процедури напрямленого вибору поточної оцінки вектора параметрів $\hat{\vec{g}}$, наприклад на основі порівняння його «якості» із «якістю» попередньої поточної оцінки.

Сформульовані вимоги до найбільш прийнятної обчислювальної схеми параметричної ідентифікації лінійного інтервального різницевого оператора дозволяють стверджувати, що подібний метод описаний авторами у праці [3]. Проведена його апробація для задач прогнозування концентрацій шкідливих викидів за допомогою різницевих операторів. Проте залишається актуальною задача дослідження та зниження обчислювальної складності запропонованих обчислювальних схем.

Висновки

Розглянуто задачу ідентифікації лінійного інтервального різницевого оператора. Показано, що у випадку врахування початкових інтервальних наближень дискретних значень прогнозованої характеристики дана задача є задачею розв'язування ІСНАР. Досліджено особливості формування та властивості розв'язку таких ІСНАР і при цьому отримано такі нові наукові та практичні результати:

- розв'язком задачі параметричної ідентифікації лінійного інтервального різницевого оператора із урахуванням початкових умов у вигляді інтервально заданих наближень дискретних значень прогнозованої характеристики є не опукла область оцінок значень параметрів цього оператора;
- обґрунтовано нову обчислювальну схему параметричної ідентифікації лінійного інтервального різницевого оператора, яка на відміну від існуючих не вимагає розв'язування складних обчислювальних задач нелінійної оптимізації високої розмірності;
- вперше на основі лінійного програмування запропоновано

обчислювальну процедуру вибору початкового наближення вектора оцінок значень параметрів інтервального лінійного різницевого оператора в задачах його параметричної ідентифікації.

В подальшому необхідно продовжити роботу на створенні та удосконаленні обчислювальних методів параметричної ідентифікації інтервального лінійного різницевого оператора згідно обґрунтованої схеми, дослідженні ефективності запропонованої процедури вибору початкового наближення вектора оцінок значень параметрів та практичному доведені її переваги по відношенню до існуючих процедур.

Література

1. Ковальчук П.І. Моделювання і прогнозування стану навколишнього середовища: Навчальний посібник / П.І. Ковальчук.- К.: Либідь, 2003. – 208 с.

2. Адмаев О.В. Моделирование оценки выбросов автотранспорта в Красноярське / О.В. Адмаев // Вестник красноярского государственного университета.Серия физико-математические науки. - 2005.-№4.- С.143-150.

3. Дивак М.П. Ідентифікація параметрів різницевого оператора в задачах моделювання процесів поширення забруднень методами аналізу інтервальних даних / М.П. Дивак, А.В. Пукас, Т.М. Дивак // Зб. Наук. праць ДонНТУ. Серія інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка.- 2009.- Вип..10(153)- С.224-229.

4. Дивак М. Ідентифікація параметрів моделей “вхід-вихід” динамічних систем на основі інтервального підходу / М. Дивак, П. Стахів, І. Каліщук // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2004. – Т.9. - №4. – с.109–117.

5. Дивак М.П., Оптимальна процедура налаштування параметрів методу ідентифікації інтервальної дискретної моделі динамічної системи / М.П. Дивак, Є.О. Марценюк, І.Ф. Войтюк //Відбір та обробка інформації.- 2008. – Вип 27 (103) - С.17-23.

6. Алефельд Г. Введение в интервальные вычисления / Г.Алефельд, Ю. Херцбергер. – М.: Мир, 1987. – 360 с.

7. Шарый С.П. Интервальные алгебраические задачи и их численное решение / С. П. Шарый // Дис. доктора физ. –математ. наук. - Новосибирск: Ин-т. вычисл. технологий СО РАН, 2000. - 322 с.