

**Г. П. Хома, С. Г. Хома-Могильська**  
**Побудова оператора для відшукування  $2\pi$ -періодичних розв'язків**  
**гіперболічних рівнянь другого порядку<sup>14</sup>**

(м. Тернопіль)

Вперше у спеціально виділеному класі функцій побудовано оператор, який переводить клас  $2\pi$ -періодичних функцій самого в себе.

Впервые в специально выделенном классе функций построен оператор, который переводит класс  $2\pi$ -периодических функций самого в себя.

Бібліогр.: 4 назв.

При дослідженні крайових періодичних задач  $u_{tt} - u_{xx} = g(x, t)$ ,  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ ,  $u(x, t + 2\pi) = u(x, t)$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , стверджується, що єдиний класичний ( $u \in C^2$ ) розв'язок вказаної задачі може існувати лише при додаткових умовах. Зокрема, у роботі О. Вейводи і М. Штедри [1] такими умовами є спеціальний клас функцій  $A_3' = \{g : g(x, t) = g(\pi - x, t + \pi) = g(x, t + 2\pi)\}$  і умова, що розв'язок

$$u^0(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \sin kx \quad (16)$$

відповідної однорідної крайової періодичної задачі  $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0$ ,  $u^0(0, t) = u^0(\pi, t) = 0$ ,  $u^0(x, t + 2\pi) = u^0(x, t)$  тривіальний, тобто, коли  $a_k = b_k = 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . З іншого боку, в роботі П. Рабиновича [2] доведено, що класичний розв'язок крайової періодичної задачі  $u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon F(x, t, u)$ ,  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ ,  $u(x, t + 2\pi) = u(x, t)$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , існує у вигляді  $u(x, t) = u^0(x, t) + \varepsilon w(x, t)$  без введення спеціального класу функцій і без обмеження на  $u^0(x, t)$ .

Нами раніше встановлено [3], що результат О. Вейводи і М. Штедри вимагає додаткових умов і залежить від методу доведення. А також показано, що і результат П. Рабиновича [2] справедливий. Якщо доведення існування єдиного розв'язку здійснювати у вигляді ряду [2]

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx, \quad u_k(t + 2\pi) = u_k(t), \quad (17)$$

то звідси випливає, що він належить класу обмежених функцій

$$Q_{2\pi \times 2\pi}^- = \{u : u(x, t) = -u(-x, t) = u(x + 2\pi, t) = u(x, t + 2\pi)\}. \quad (18)$$

Використовуючи введений клас функцій (3) і клас  $Q_{2\pi}^- = \{\mu : \mu(z) = -\mu(-z) = \mu(z + 2\pi)\}$  встановлено ряд тверджень, на основі яких будується оператор, що переводить клас періодичних функцій  $Q_{2\pi \times 2\pi}^-$  у цей же клас функцій.

**1. Властивості оператора Даламбера.** На основі вивчення властивостей внутрішнього інтегралу функції (оператора Даламбера)

$$\tilde{u}_H(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi \quad (19)$$

можна досліджувати існування періодичних розв'язків крайових  $2\pi$ -періодичних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку. Введемо позначення

$$K(x, t, \tau) = \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi. \quad (20)$$

**Лема.** Якщо  $f(x, t) \in C(\mathbb{R}^2) \cap Q_{2\pi \times 2\pi}^-$ , то

- 1)  $K(x + 2\pi, t, \tau) = K(x, t, \tau)$ ;
- 2)  $K(x, t + 2\pi, \tau) = K(x, t, \tau)$ ;
- 3)  $K(x, t, \tau + 2\pi) = K(x, t, \tau)$ ;
- 4)  $K(-x, t, \tau) = -K(x, t, \tau)$ .

**Доведення.** Безпосередньою перевіркою переконуємося у справедливості твердження 1) леми. Далі на основі (7) одержуємо

$$\begin{aligned} K(x, t + 2\pi, \tau) &= \int_{x-t+\tau-2\pi}^{x+t-\tau+2\pi} f(\xi, \tau) d\xi = \int_{x-t+\tau-2\pi}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi + \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi + \\ &+ \int_{x+t-\tau}^{x+t-\tau+2\pi} f(\xi, \tau) d\xi = \int_{-2\pi}^0 f(\xi, \tau) d\xi + \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi + \int_0^{2\pi} f(\xi, \tau) d\xi = \\ &= 0 + \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi + 0 = K(x, t, \tau). \end{aligned}$$

Отже, твердження 2) леми справедливе. Аналогічно доводимо твердження 3) і 4) леми.

**2. Основна лема.** На основі вищевиведеної лема можна довести наступне твердження.

**Основна лема.** Нехай  $f(x, t) \in C(\mathbb{R}^2) \cap Q_{2\pi \times 2\pi}^-$ . Тоді оператор, визначений формулою

$$\begin{aligned} (Pf)(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \left( \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(\xi, s) d\xi \right) d\tau \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_0^t \left( K(x, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau, \end{aligned} \quad (21)$$

при кожній функції  $\mu(z) \in (\mathbb{R}) \cap Q_{2\pi}^-$  переводить функцію  $f$  із класу  $Q_{2\pi \times 2\pi}^-$  в клас  $Q_{2\pi \times 2\pi}^-$ , причому

$$(Pf)(0, t) = 0, \quad (Pf)(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

**Доведення.** Спочатку доведемо, що функція  $(Pf)$  задовольняє крайові умови (9). На основі (8) при  $x = 0$  одержуємо

$$(Pf)(0, t) = 0 + \frac{1}{2} \int_0^t \left( \int_0^{t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_{-(t-s)}^{t-s} f(\xi, s) d\xi \right) d\tau. \quad (23)$$

Оскільки при  $f(x, t) \in Q_{2\pi \times 2\pi}^-$  інтеграл

$$\int_{-(t-\tau)}^{t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi \equiv 0, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (24)$$

то на основі (10) і (11) маємо  $(Pf)(0, t) = 0$ , тобто функція  $Pf$  задовольняє першу крайову умову (9). Тепер, покладаючи  $x = \pi$  у формулі (8), одержуємо

$$\begin{aligned} (Pf)(\pi, t) &= \frac{1}{2} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \left( \int_{\pi-t+\tau}^{\pi+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_{\pi-t+s}^{\pi+t-s} f(\xi, s) d\xi \right) d\tau. \end{aligned} \quad (25)$$

Доведемо, що при  $f(x, t) \in Q_{2\pi \times 2\pi}^- \cap C(\mathbb{R}^2)$  і  $\mu(z) \in C(\mathbb{R}) \cap Q_{2\pi}^-$  інтеграли

$$\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha \equiv 0; \quad \int_{\pi-t+\tau}^{\pi+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi \equiv 0, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Справді,

$$\begin{aligned} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha &= \int_0^{2\pi} \mu(\alpha) d\alpha \equiv 0; \\ \int_{\pi-t+\tau}^{\pi+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi &= \int_{-t+\tau}^{t-\tau} f(\pi + \eta, \tau) d\eta = \int_{-t+\tau}^0 f(\pi + \eta, \tau) d\eta + \int_0^{t-\tau} f(\pi + \eta, \tau) d\eta = \\ &= \int_0^{t-\tau} f(\pi - y, \tau) dy + \int_0^{t-\tau} f(\pi + \eta, \tau) d\eta = \\ &= - \int_0^{t-\tau} f(\pi + y, \tau) dy + \int_0^{t-\tau} f(\pi + \eta, \tau) d\eta \equiv 0. \end{aligned}$$

Отже, на основі (12) і доведених рівностей маємо  $(Pf)(\pi, t) \equiv 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Таким чином, виконується і друга крайова умова (9).

Нехай  $f(x, t) \in C(\mathbb{R}^2) \cap Q_{2\pi \times 2\pi}^-$  і  $\mu(z) \in C(\mathbb{R}) \cap Q_{2\pi}^-$ . Доведемо справедливості рівностей

$$(Pf)(x, t + 2\pi) = (Pf)(x, t); \quad (26)$$

$$(Pf)(x + 2\pi, t) = (Pf)(x, t); \quad (27)$$

$$(Pf)(-x, t) = -(Pf)(x, t). \quad (28)$$

Оскільки  $(Pf)(x, t) \equiv u^0(x, t) + \bar{u}(x, t)$ , то спочатку доведемо, що властивостями (13)–(15) володіє розв'язок

$$u^0(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha$$

однорідної крайової періодичної задачі  $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0$ ,  $u^0(0, t) = u^0(\pi, t) = 0$ ,  $u^0(x, t + 2\pi) = u^0(x, t)$ .

Нехай  $\mu(z) \in C(\mathbb{R}) \cap Q_{2\pi}^-$ . Тоді

$$u^0(x, t + 2\pi) = \frac{1}{2} \int_{t-x+2\pi}^{t+x+2\pi} \mu(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\eta + 2\pi) d\eta = u^0(x, t);$$

$$\begin{aligned}
u^0(x+2\pi, t) &= \frac{1}{2} \int_{t-x-2\pi}^{t+x+2\pi} \mu(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} \int_{t-x-2\pi}^{t-x} \mu(\alpha) d\alpha + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_{t+x}^{t+x+2\pi} \mu(\alpha) d\alpha = 0 + u^0(x, t) + 0 = u^0(x, t); \\
u^0(-x, t) &= \frac{1}{2} \int_{t+x}^{t-x} \mu(\alpha) d\alpha = -\frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha = -u^0(x, t),
\end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Тепер покажемо, що властивостями (13)–(15) володіє і розв'язок

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left( K(x, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau. \quad (29)$$

Справді,

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x, t+2\pi) &= \frac{1}{2} \int_0^{t+2\pi} \left( K(x, t+2\pi, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t+2\pi, s) ds \right) d\tau = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t \left( K(x, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau + \\
&+ \frac{1}{2} \int_t^{t+2\pi} \left( K(x, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau = \\
&= \tilde{u}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( K(x, t, \tau) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau = \\
&= \tilde{u}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( K(x, t, \tau) - \frac{2\pi}{4\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau \equiv \tilde{u}(x, t).
\end{aligned}$$

Покладаючи  $x+2\pi$  замість  $x$  у формулі (16) одержуємо

$$\tilde{u}(x+2\pi, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left( K(x+2\pi, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x+2\pi, t, s) ds \right) d\tau = \tilde{u}(x, t).$$

Аналогічно маємо

$$\begin{aligned}\bar{u}(-x, t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \left( \int_{-x-t+\tau}^{-x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_{-x-t+s}^{-x+t-s} f(\xi, s) d\xi \right) d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^t \left( \int_{x+t-\tau}^{x-t+\tau} f(-\eta, \tau) d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_{x+t-s}^{x-t+s} f(-\eta, s) d\eta \right) d\tau = -\bar{u}(x, t),\end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Використовуючи доведені властивості для функцій  $u^0(x, t)$  і  $\bar{u}(x, t)$  та зображення оператора  $(Pf)(x, t) \equiv u^0(x, t) + \bar{u}(x, t)$ , переконуємося у справедливості тверджень основної леми.

**3. Застосування.** Одержані результати дозволяють використати чисельно-аналітичний метод [4] для дослідження нелінійних крайових періодичних задач вигляду

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon F(x, t, u), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (30)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (31)$$

$$u(x, t + 2\pi) = u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}, \quad (32)$$

при умові, що для кожної функції  $u(x, t) \in Q_{2\pi \times 2\pi}^-$  функція  $f(x, t, u(x, t)) \in Q_{2\pi \times 2\pi}^-$ .

1. Вейвода О., Штедры М. Существование классических периодических решений волнового уравнения: Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений // Дифференц. уравнения. - 1984. - Т. 20, № 10. - С. 1733-1739.

2. Rabinowitz P. Periodic solution of hyperbolic partial differential equations // Comm. Pure Appl. Math. - 1967. - Vol. 20, № 1. - P. 145-205.

3. Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г. Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. I // Укр. мат. журн. - 2005. - Т. 57, № 7. - С. 912-921.

4. Самойленко А. М., Ронто Н. И. Чисельно-аналитические методы исследования периодических решений. - К.: Вища шк., 1976. - 180 с.

Г. П. Хома, С. Г. Хома-Могильська, В. З. Чорний

Умови існування розв'язків крайових задач<sup>15</sup>

(м. Тернопіль)

Встановлено клас функцій, для якого існує класичний розв'язок задачі  $u_{tt} - u_{xx} = g(x, t)$ ,  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ ,  $u(x, t + 2\pi) = u(x, t)$ .

Установлен класс функций, для которого существует классическое решение задачи  $u_{tt} - u_{xx} = g(x, t)$ ,  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ ,  $u(x, t + 2\pi) = u(x, t)$ .

Бібліогр.: 3 назв.

**1. Постановка задачі.** Важливим етапом при дослідженні крайових задач є встановлення умов існування та побудова розв'язку. У роботі [1] вперше, на нашу думку, встановлено загальні умови розв'язності крайової  $\omega$ -періодичної задачі вигляду

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (33)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (34)$$

$$u(x, t + \omega) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (35)$$

Якщо припустити, що існує частинний розв'язок  $\tilde{u}(x, t)$  задачі (1), (3) такий, що  $\tilde{u}(x, t + \omega) = \tilde{u}(x, t)$ , то умови існування розв'язку задачі (1)–(3) мають вигляд [1, с. 915]:

$$\begin{aligned} B + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^1 \cos \nu_k t + A_k^3 \sin \nu_k t) + \tilde{u}(0, t) &= 0, \\ A\pi + B + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^1 \cos \nu_k \pi + A_k^2 \sin \nu_k \pi) \cos \nu_k t + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^3 \cos \nu_k \pi + A_k^4 \sin \nu_k \pi) \sin \nu_k t + \tilde{u}(\pi, t) &= 0, \end{aligned} \quad (36)$$

де  $A, B, A_k^i, i = 1, 2, 3, 4, k \in \mathbb{N}$ , – невідомі коефіцієнти,  $\nu_k = \frac{2\pi k}{\omega}$ .

Отже, щоб мати розв'язок задачі (1)–(3), потрібно провести математичне дослідження розв'язності системи (4). Зрозуміло, що система (4) може мати різну структуру в залежності від вибору  $\omega$  періоду та частинного розв'язку  $\tilde{u}(x, t)$  періодичної задачі (1), (3) [1].

Наша мета – провести повне дослідження та побудувати розв'язок крайової періодичної задачі (1)–(3) при  $\omega = 2\pi$  у випадку, коли замість розв'язку  $\tilde{u}(x, t)$

покласти відому функцію [1, с. 913]

$$\tilde{u}_1(x, t) = -\frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau \equiv (S_1 g)(x, t). \quad (37)$$

На підставі умов розв'язності (4) розв'язок крайової  $2\pi$ -періодичної задачі

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (38)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (39)$$

$$u(x, t + 2\pi) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbb{R} \quad (40)$$

має вигляд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^2 \cos kt + A_k^4 \sin kt) \sin kx + (S_1 g)(x, t) - \frac{x}{\pi} (S_1 g)(\pi, t), \quad (41)$$

де  $A_k^2, A_k^4, k \in \mathbb{N}$ , — довільні сталі. Таким чином, ми одержали твердження, що крайова  $2\pi$ -періодична задача (6)–(8) має безліч розв'язків. Отже, для визначення єдиності розв'язку задачі (6)–(8) треба однозначно визначити невідомі коефіцієнти  $A_k^2$  і  $A_k^4$ . Слід зазначити, що для їх визначення не задано додаткових умов. Це вимагає додаткових математичних досліджень. З іншого боку, формула (9) не завжди є розв'язком рівняння (6), оскільки невідомо, яке значення  $(S_1 g)(x, t)$  набуває функція (5) при  $x = \pi$ .

**2. Основні результати.** Враховуючи вище зроблені зауваження відносно розв'язності крайової  $2\pi$ -періодичної задачі (6)–(8), нами встановлено наступне твердження.

**Лема 1.** Для кожної функції  $\mu(t) \in C^1(\mathbb{R})$  і  $\mu(t + 2\pi) = \mu(t)$ , яка розкладається у рівномірно збіжний ряд Фур'є

$$\mu(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

справедливим є зображення

$$\frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha - \frac{x}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^1 \cos kt + A_k^4 \sin kt) \sin kx, \quad (42)$$

де  $A_k^2 = a_k/k, A_k^4 = b_k/k, k \in \mathbb{N}$ .



**Доведення.** Справді, обчислюючи відповідні інтеграли від заданого ряду, отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha &= \frac{a_0}{2} x + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k}{2k} \operatorname{sink} \alpha \right) \Big|_{t-x}^{t+x} - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{b_k}{2k} \operatorname{cosk} \alpha \right) \Big|_{t-x}^{t+x} = \\ &= \frac{a_0}{2} x + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k}{2k} (\operatorname{sink}(t+x) - \operatorname{sink}(t-x)) \right) - \frac{b_k}{2k} (\operatorname{cosk}(t+x) - \operatorname{cosk}(t-x)) = \\ &= \frac{a_0}{2} x + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k}{k} \operatorname{cosk} t \operatorname{sink} x + \frac{b_k}{k} \operatorname{sink} t \operatorname{sink} x \right) = \\ &\equiv \frac{a_0}{2} x + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k^2 \operatorname{cosk} t + A_k^4 \operatorname{sink} t \right) \operatorname{sink} x, \end{aligned} \quad (43)$$

де  $A_k^2 = \frac{a_k}{k}$ ,  $A_k^4 = \frac{b_k}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Аналогічно одержуємо

$$\frac{x}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha = \frac{a_0}{2} x + \frac{x}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k^2 \operatorname{cosk} t + A_k^4 \operatorname{sink} t \right) \operatorname{sink} \pi \equiv \frac{a_0}{2} x. \quad (44)$$

Тепер на підставі (11), (12) переконуємося, що справедливе представлення (10). Лему 1 доведено.

Отже, на підставі леми 1 і, враховуючи (5), розв'язок (9) крайової  $2\pi$ -періодичної задачі (6)–(8) можна зобразити у вигляді

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha - \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau + \\ &+ \frac{x}{2\pi} \left\{ \int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau - \int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha \right\}. \end{aligned} \quad (45)$$

Це дає можливість сформулювати результат, аналогічний результату П. Рабиновича [2].

**Теорема 1.** Нехай  $g \in C^{0,1}([0, \pi] \times \mathbb{R})$  і  $g(x, t+2\pi) = g(x, t)$ . Тоді для кожної функції  $\mu(t) \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $\mu(t+2\pi) = \mu(t)$ , яка задовольняє рівняння

$$\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha = \int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau, \quad (46)$$

функція

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha - \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau \equiv u^0(x, t) + (S_1 g)(x, t) \quad (47)$$

є єдиним класичним розв'язком крайової  $2\pi$ -періодичної задачі (6)–(8).

Лема 2. Якщо  $\mu(t) \in C(\mathbb{R})$  і  $\mu(t+2\pi) = \mu(t)$ , то справедлива рівність

$$\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} \mu(\alpha) d\alpha \equiv \text{const.}$$

Доведення. Запишемо рівність

$$\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha = \int_{t-\pi}^{-\pi} \mu(\alpha) d\alpha + \int_{-\pi}^{\pi} \mu(\alpha) d\alpha + \int_{\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha.$$

Якщо в останньому інтегралі правої частини зробити заміну змінної  $\alpha = 2\pi + \theta$ , то остання рівність запишеться так:

$$\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha = \int_{t-\pi}^{-\pi} \mu(\alpha) d\alpha + \int_{-\pi}^{\pi} \mu(\alpha) d\alpha + \int_{-\pi}^{t-\pi} \mu(2\pi + \theta) d\theta$$

або

$$\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} \mu(\alpha) d\alpha \equiv \text{const.},$$

що й потрібно було довести.

Враховуючи твердження теореми 1 і леми 2, на підставі рівності (14) робимо висновок про клас функцій, для яких справедлива теорема 1. Очевидно, це клас функцій, для яких

$$K(t) = \int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau \equiv \text{const.}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

або

$$K'(t) = \int_0^{\pi} (g(\xi, t+\pi-\xi) - g(\xi, t-\pi+\xi)) d\xi \equiv \text{const.}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (48)$$

тобто похідна  $K'(t)$  тотожньо повинна дорівнювати нулеві для всіх  $t \in \mathbb{R}$ .

Проведемо дослідження рівності (16), записавши її у вигляді

$$\int_0^{\pi} g(\xi, t + \pi - \xi) d\xi - \int_0^{\pi} g(\xi, t - \pi + \xi) d\xi \equiv 0,$$

або

$$\int_0^{\pi} g(\xi, t + \pi - \xi) d\xi = \int_0^{\pi} g(\xi, t - \pi + \xi) d\xi. \quad (49)$$

Якщо провести заміну змінної  $\xi = \pi - y$  у правій частині рівності (17), то одержимо

$$\int_0^{\pi} g(\xi, t - \xi + \pi) d\xi = \int_0^{\pi} g(\pi - y, t - y) dy. \quad (50)$$

Отже, рівність (18) може виконуватися для такого класу функцій:

$$g(x, t + \pi) = g(\pi - x, t). \quad (51)$$

Припустимо тепер, що  $g(x, t) \in C([0, \pi] \times \mathbb{R})$  і для неї виконується умова (19) та умова

$$\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau = \delta \neq 0 \quad (\delta = \text{const}). \quad (52)$$

**Лема 3.** Нехай виконується умова (20). Тоді для кожної функції  $\mu(t) \in C(\mathbb{R})$ ,  $\mu(t + 2\pi) = \mu(t)$  для якої

$$\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha = \gamma \neq 0 \quad (\gamma = \text{const}), \quad (53)$$

функція  $\beta = \frac{\delta}{\gamma} \mu(t)$  задовольняє умову (14).

**Доведення.** Справді, на підставі (20) і (21) маємо, що

$$\begin{aligned} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \beta(\alpha) d\alpha - \int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau &= \frac{\delta}{\gamma} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha - \int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau = \\ &= \frac{\delta}{\gamma} \gamma - \delta \equiv 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Звідси випливає таке твердження.

**Теорема 2.** Нехай

1)  $g(x, t) \in C^{0,1}([0, \pi] \times \mathbb{R})$ ,  $g(\pi - x, t) = g(x, t + \pi)$  і  $g(x, t + 2\pi) = g(x, t)$ ;

2)  $\mu(t) \in C^1(\mathbb{R})$  і  $\mu(t + 2\pi) = \mu(t)$ ;

3) виконуються умови (20) і (21).

Тоді для кожної функції  $\beta = \frac{2}{\pi} \mu(t)$  функція

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \beta(\alpha) d\alpha - \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau \equiv u^0(x, t) + (S_1 g)(x, t)$$

є єдиним класичним розв'язком крайової  $2\pi$ -періодичної задачі (6)–(8).

Зрозуміло, що поза увагою залишається випадок, коли

$$\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha = 0.$$

Зауважимо, що для підкласу всіх непарних і  $2\pi$ -періодичних функцій  $\mu(t)$  виконується умова (22) (лема 2).

Справді, позначимо

$$K_1(t) = \int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha.$$

Тоді

$$K_1'(t) = \mu(t + \pi) - \mu(t - \pi) = \mu(t + \pi) - \mu(t + \pi) \equiv 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Отже,  $K(t) = \text{const}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Оскільки  $K(0) \equiv 0$ , отже,  $K(t) \equiv 0$  для всіх  $t \in \mathbb{R}$ .

Таким чином, випадок (22) вимагає додаткових досліджень і додаткових умов на праву частину  $g(x, t)$  рівняння (6).

Має місце твердження.

**Теорема 3** [1, с. 921]. Нехай  $g \in C^{0,1}([0, \pi] \times \mathbb{R})$ ,  $g(x, t + 2\pi) = g(x, t)$  і функція  $g(x, t)$  задовольняє рівняння

$$\int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (54)$$

Тоді для кожної непарної  $2\pi$ -періодичної функції  $\mu(t) \in C^1(\mathbb{R})$  функція  $u(x, t)$ , яка визначена формулою (15), є єдиним класичним розв'язком крайової періодичної задачі (6)–(8).

**Зауваження.** Отже, на нашу думку, сформульовані теореми 2 і 3 підтверджують результат роботи [2] (результат П. Рабиновича) про можливість існування класичних  $2\pi$ -періодичних розв'язків крайової періодичної задачі (6)–(8) при  $\omega = 2\pi$  у вигляді  $u(x, t) = u^0(x, t) + (S_1 g)(x, t)$ , де  $u^0(x, t)$  – розв'язок однорідного рівняння  $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0$ .

**Приклад.** Для рівняння  $u_{tt} - u_{xx} = \cos x \sin t$ , згідно з теоремою 3 розв'язком буде функція

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha - \frac{1}{2} x \sin x \sin t,$$

де  $\mu(t)$  – неперервна і  $2\pi$ -періодична функція.

**Висновки.** У випадку  $\omega = 2\pi$  на підставі умови розв'язності (4) підтверджено результат П. Рабиновича [2, 3], який сформульовано у вигляді теорем 2, 3. Це результат про можливість існування класичних  $2\pi$ -періодичних розв'язків крайової періодичної задачі (6)–(8) у вигляді  $u(x, t) = u^0(x, t) + (S_1 g)(x, t)$ , де  $u^0(x, t)$  – розв'язок однорідного рівняння  $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0$ , а  $(S_1 g)(x, t)$  – розв'язок лінійного неоднорідного рівняння  $u_{tt} - u_{xx} = g(x, t)$ .

1. Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г. Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. І // Укр. мат. журн. – 2005. – 57, № 7. – С. 912–921.

2. Rabinowitz P. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Comm. Pure Appl. Math. – 1967. – Vol. 20, № 1. – P. 145–205.

3. Rabinowitz P. Periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations // Ibid. – 1969. – Vol. 22, № 1. – P. 15–39.

УДК 517.968

**А.Г. Щербакова**

### Случай нулей нецелых порядков для некоторых интегральных уравнений типа свертки<sup>16</sup>

(г. Тирасполь)

В работе установлены условия разрешимости и изучаются некоторые свойства решений некоторых интегральных уравнений типа свертки в исключительном случае.