МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Хома-Могильська Світлана Григорівна
Хома Надія Григорівна

МОДЕЛІ СОЦІАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ

Навчальний посібник

Тернопіль-2016

ББК 65.26
УДК 364.3
Х76

***Рецензенти*:**

Л. Г. Хохлова – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка

Л. З. Ребуха – кандидат психологічних наук, доцент кафедри соціальної роботи Тернопільського національного економічного університету

Х76 **Хома-Могильська С. Г., Хома Н. Г.** Моделі соціальних процесів: Навчальний посібник. – Тернопіль: СМП «Тайп», 2016. – 131с.

Навчально-методичний посібник «Моделі соціальних процесів» для вищих навчальних закладів написано відповідно до вимог МОН України щодо викладу змісту матеріалу при підготовці бакалаврів економічно-соціального профілю. Висвітлені основні теми, передбачені навчальною програмою курсу «Моделі соціальних процесів», подано приклади розв’язування задач.

ББК 65.26
УДК 364.3

© Хома-Могильська С. Г., Хома Н.Г., 2016

ВСТУП

Використання математичного апарату при дослідженні соціальних процесів дозволяє глибше проаналізувати соціальні системи в різних умовах, спрогнозувати майбутню поведінку та створити кількісні сценарії керування такими процесами. Математичне моделювання є синтетичною дисципліною, що включає як методи точних наук, так і мистецтво постановки, формалізації та інтерпретації отриманих результатів.

Мета вивчення дисципліни «Моделі соціальних процесів» складається з частин, відповідно загальних понять та підходів математичного моделювання та застосувань до загальних соціальних явищ. Загальною метою вивчення математичного моделювання в даному курсі є оволодіння основними навичками постановки формалізованих задач та аналітичними, математичними та комп'ютерними засобами розв'язку таких задач. Це дозволяє як засвоїти інтуїтивну специфіку підходів, так і закласти фундамент для більш поглибленого її вивчення з широким застосуванням.

З модельного подання соціального об'єкта як суперпозиції множин-якостей випливає можливість якісного аналізу як суб'єктивних, так і об'єктивних ознак, які визначають ефективність дослідження соціальних процесів.

У посібнику широко висвітлений теоретичний апарат математичного моделювання. Поряд з тим теоретичні викладки ілюструються конкретними прикладами побудови різного роду моделей (соціометричних, оптимізаційних, динамічних тощо), ґрунтовно висвітлюється методика аналізу отриманих результатів.

ТЕМА 1.

Соціальні процеси: суть та особливості

1. Суть соціальних відносин.

2. Природа соціальних процесів.

3. Суть та відмінні ознаки управління соціальними процесами

Під соціальними відносинами розуміється певна стійка система зв'язків індивідів, що склалася в процесі їх взаємодії один з одним в умовах даного суспільства. Соціальні відносини об'єктивні за своєю природою, переломлюються через внутрішній зміст або стан людини і виражаються в його діяльності як його особисте ставлення до навколишньої дійсності.

Потреби індивідів, природа і спосіб задоволення цих потреб ставлять індивідів у залежність один від одного, зумовлюють необхідність їх взаємодії один з одним і викликають до життя соціальні відносини. Індивіди виступають у взаємодію один з одним не як чисті "Я", а як індивіди, що знаходяться на певному щаблі розвитку продуктивних сил і потреб.

Сукупність соціальних відносин представляє собою структуру суспільства. Соціальна структура охоплює розміщення всіх відносин, залежностей, взаємодій між окремими елементами в соціальних системах різного рангу. Як елементи виступають соціальні інститути, соціальні групи і спільноти різних типів, базовими одиницями соціальної структури є норми і цінності.

Соціальні норми – це засоби соціальної регуляції поведінки індивідів і груп. Соціальні норми забезпечують стабільність суспільства, його відтворення, захист його від зовнішніх і внутрішніх руйнівних впливів.

Соціальна група – є сукупність людей, які певним чином взаємодіють один з одним, усвідомлюють свою приналежність до даної групи і вважаються членами цієї групи з точки зору інших. Соціальні групи як елементи соціальної структури в кожен даний момент розвитку суспільства є в певному й доступному для огляду кількості, але нескінченно безліч їх зв'язків, взаємин.

Будь-яка людина займає багато позицій в суспільстві. Кожна з цих позицій, що припускає визначені права та обов'язки, – є "статус". З "статусом" людини пов'язана очікувана від нього іншими людьми поведінка, тобто "Роль".

Соціальна роль – це соціальна функція, модель поведінки, об'єктивно задана соціальною позицією особистості в системі соціальних і міжособистісних відносин.

Поняття соціального інституту охоплює великі угруповання соціальних ролей. Виконання індивідами своїх соціальних ролей, є необхідною умовою діяльності соціального інституту. Інституалізацію можна розуміти як обмін між

різними індивідами, групами і сферами всередині суспільства, це стійкий комплекс формальних і неформальних правил, принципів, установок, що регулюють різні сфери людської діяльності і організують їх у систему ролей і статусів. Для опису нерівності між групами (спільнотами) людей застосовується поняття соціальної стратифікації.

"Соціальна стратифікація – це диференціація деякої даної сукупності людей (населення) на класи в ієрархічному ранзі. Вона знаходить вираження в існуванні вищих і нижчих шарів. Її основа і сутність – у нерівномірному розподілі прав і привілеїв, відповідальності й обов'язку, наявності і відсутності соціальних цінностей , влади і впливи серед членів того чи іншого співтовариства ".

З соціальною стратифікацією пов'язане поняття "соціальної мобільності". Під соціальною мобільністю розуміється "будь-який перехід індивіда чи соціального об'єкта (цінності), тобто всього того, що створено або модифіковано людською діяльністю, з однієї соціальної позиції в іншу". За мобільністю приховані структурні зміни в суспільстві.

Соціальна структура є якісна визначеність суспільства, тому її зміна висловлює корінний якісний зсув у суспільстві. Структура соціального об'єкта забезпечує необхідну стійкість у функціонуванні взаємопов'язаних елементів, що дозволяє накопичувати кількісні зміни, аж до моменту, коли настає історична необхідність структурних зрушень в суспільстві.

Цілісні соціальні системи динамічні, що означає, що в них протікають процеси, тобто має місце зміна структурних елементів і зв'язків між ними, яке поступово переводить систему з одного стану в інший. Ціле являє собою процес, а тому структура є організацією його в часі.

Соціальна структура охоплює розміщення всіх відносин, залежностей, взаємодій між окремими елементами в соціальних системах різного рангу зрушень в суспільстві. Відносний консерватизм соціальної структури виступає як момент динамізму суспільних процесів у цілому.

Суспільство має розглядатися не як статичне, стабільний стан, а як процес, постійно триваючий, нескінченний потік подій. Було визнано, що суспільство може бути визначене як існуюче лише стільки і до тих пір, поки всередині нього щось відбувається, робляться будь-які дії, протікають якісь процеси, якщо щось змінюється, суспільство не може існувати в незмінному стані. Вся соціальна реальність являє собою просто динаміку, потік змін різної швидкості, інтенсивності, ритму і темпу.

Соціальні взаємини пов'язують не людські особистості, це сплетіння ідей, правил, дій та інтересів (чотири види тканини існуючої в суспільстві). Взаємопов'язана мережа ідей становить ідеальний вимір поля, його "соціальна свідомість". Взаємопов'язані мережі правил, норм, цінностей утворюють нормативне вимір поля, його "соціальні інструкції". Взаємопов'язані мережі дій становлять "соціальну організацію" суспільства, а мережі інтересів – вимірювання поля за шкалою можливостей, його "соціальну ієрархію". На всіх чотирьох рівнях про-

цеси йдуть не незалежно один від одного, а навпаки, перебуваючи в численних і багатовимірних взаємозв'язках.

2. Класичне визначення соціального процесу дав Питирим Сорокін: "Під процесом розуміється будь-який вид руху, модифікації, трансформації, чергування або "еволюції", коротше кажучи, будь-яка зміна даного досліджуваного об'єкта протягом певного часу, будь то зміна його місця в просторі, або модифікація його кількісних і якісних характеристик".

Серед соціальних процесів соціологи виділили дві їх специфічні форми. По-перше, це "соціальний розвиток" – форма, яка розкриває потенціал, який спочатку закладений в системі. Мова в даному випадку йде про направлений процес, тобто такий, в якому ні один зі станів системи не повторюється ні на якій попередній стадії, а на пізнішій виходить на більш високий рівень в будь-якій сфері (наприклад, зростання економічних показників, просунутість технологій або збільшення населення). Крім того, система послідовно наближається до загального стану (наприклад, суспільство наближається до стану соціальної рівності, процвітання чи демократичного представництва), причому це стимулюється іманентними властивостями самої системи (внутрішні протиріччя вирішуються завдяки появі якісно нових форм соціального життя; притаманне людям творчий початок направляється на масштабні організаційні інновації і т.д.). Інша форма соціального процесу - це "соціальний цикл". Він не має певної спрямованості, хоча і не є випадковим. Будь-яке стан, в якому перебуває система на тій чи іншій стадії, може повторитися в майбутньому, причому даний стан, у свою чергу, вже коли щось траплялося в минулому. У короткому часовому інтервалі зміни відбуваються, але на тривалому відрізку часу – немає, оскільки система повертається до початкового стану.

До числа найбільш спірних, але, водночас і найбільш впливових у всій історії людської думки відноситься ідея "соціального прогресу". Під "прогресом" розуміється спрямований процес, який неухильно приводить систему все ближче або до більш кращого, кращому стану (до реалізації етичних цінностей, таких як щастя, свобода, процвітання, справедливість), або до ідеального стану суспільства, описаного в численних соціальних утопіях.

Соціальні процеси можуть бути спрямованими й ненаправленими. Перші незворотні і часто мають тенденцію до концентрації, накопичення. Кожна наступна стадія відрізняється від будь-якої більш ранньої і включає в себе її результат, тоді як більш рання стадія готує необхідність більш пізньої. Прикладами спрямованого процесу можуть служити соціалізація особистості, зростання населення, індустріалізація і т. д. Ненаправлені (або текучі) процеси мають або чисто випадковий, хаотичний характер (збуджений натовп), або їх перебіг підпорядковується певним повторюваним або, щонайменше, схожим моделям, такий процес розглядається як круговий або замкнутий цикл. Якщо після кожного циклу досягається більш високий рівень, то можна говорити про розвиток, прогресивний цикл, якщо ж рівень виявляється більш низьким, то процес має ква-

ліфікуватися як регресивний. Окремий випадок, коли в соціальних системах нічого не відбувається протягом якогось часу, визначається як стагнація (застій).

Важливим критерієм є кінцевий результат процесу. Деякі, воістину творчі процеси призводять до фундаментальних нововведень – виникнення абсолютно нових соціальних умов, станів суспільства, соціальних структур і т.д. Процеси такого типу позначають терміном "морфогенезиз". До них відносяться, наприклад, поширення нового стилю життя, заснування нових міст, прийняття конституції нової держави. Морфогенетичні процеси відіграли вирішальну роль у походженні всіх цивілізацій, в технологічних,культурних і соціальні досягнення людства, починаючи з ранніх примітивних суспільств і закінчуючи сучасної індустріальної епохою. Ці процеси слід відрізняти від простої трансмутації, що приводить до менш радикальних результату і тягне за собою лише модифікацію, реформацію або перегляд існуючих соціальних установок. Серед даного типу процесів можна виділити еволюційні, адаптивні, гомеостатичні, що врівноважують або підтримуючі процеси, які, в кінцевому рахунку, дозволяють пристосовуватися до навколишніх умов, зберігаючи існування суспільства в незмінній формі.

Які ж рушійні сили, причинні фактори соціальних процесів? А, крім того, знаходяться вони всередині самого процесу або діють ззовні? Ендогенні процеси (з іманентною, тобто внутрішньою причиною) розкривають потенційні можливості, властивості або тенденції, укладені всередині змінюється реальності, екзогенні процеси (з зовнішньою причиною) є відповіддю на виклик (стимул, тиск) ззовні. Проте провести розмежовуючу лінію між ними буває дуже важко. Швидше, особливо розглядаючи соціальні процеси на більш тривалому відрізку часу, більшість з них можна назвати "екзогенно-ендогенними": розвиваючись, вони призводять до результатів, які впливають не тільки на правила функціонування системи, де протікають ці процеси, але і на її оточення, що також викликає відповідну реакцію. У якісному відношенні причини змін можуть бути різними – це і природні, і демографічні, і політичні, і економічні, і культурні та багато інших. Серед численних версій, що висувають різні фактори на роль головних, виділяються дві основні: прихильники одного роблять акцент на "матеріальних процесах", породжених "жорстким" технологічним, економічним, або біологічним тиском; представники другої вважали, що незалежну причинну роль відіграють ідеологія, релігія, етика, тобто "Ідеальні процеси". Зараз намітилася тенденція уникати такого поділу і розглядати причинність як взаємодія численних сил і чинників, широко поширилося переконання, що говорити про домінуючі рушійні сили помилково і означає спрощення ситуації, оскільки за всім цим стоїть реальна людська діяльність.

Існує інша точка зору на природу соціальних процесів. "Під соціальними процесами розуміються соціальні зміни, що представляють собою сукупні, односпрямовані і повторювані дії індивідів, груп і т.д.". Це акти соціальних взаємодій, результатом яких є зміна соціальних відносин між людьми, наприклад, процеси соціальної мобільності, соціальні конфлікти та інші, тобто не

будь-яка зміна, а зміни, що відбуваються в результаті односпрямованої взаємодії людей, пов'язані з наявністю у людей однакових мотивів і орієнтацій.

3. Соціальна діяльність здійснюється за допомогою історично сформованих типів і форм взаємодії і відносин людини з іншими людьми. Вона може здійснюватися в різних сферах і на різних рівнях соціальної організації суспільства.

Соціальні процеси досить різноманітні. Вони пов'язані з соціальними відносинами між індивідами і соціальними групами як носіями різних видів діяльності, розрізняються соціальними позиціями і ролями в житті суспільства, тобто пов'язані з певними видами суспільних структур і відповідних їм суспільних відносин. При цьому під суспільними відносинами розуміється сукупність всіх видів відносин даного суспільства. Люди, що функціонують в тій чи іншій структурі, здійснюють свої функції, взаємодіючи один з одним.

Управління соціальними процесами - одне з найбільш складних. Це пов'язано з тим, що кожен вид суспільних відносин відіграє певну роль у загальній системі. Суспільство, будучи соціо-орієнтовною системою; має властивість самовідтворення, що здійснюється через ряд необхідних, диференційованих функцій. Ці функції - перш за все наслідок поділу суспільної праці, але, доповнюючи один одного і взаємодіючи, вони надають суспільству характер особливого соціального організму.

Диференціація суспільних функцій супроводжувалася виникненням різних безособистісних структур (економічних, соціальних, політичних та інших інститутів). Функції, пов'язані із забезпеченням функціонування цих структур, виконують люди, що володіють професійними знаннями та іншими необхідними якостями. Кожна зі структур системи надає їй в процесі її відносин з іншими структурами нову (системну) якість. При цьому соціо-орієнтовна система постійно відтворює соціальну якість своїх структур і соціальні якості індивідів і груп індивідів, включених до їх функціонування, тобто суб'єктів соціальних відносин. Це одна сторона функціонування соціо-орієнтовної системи.

Інша сторона відображає процес поведінки соціо-орієнтовної системи. Наприклад, суб'єкти соціальних відносин можуть виконувати невластиві їм функції (адміністративно-наказові методи регулювання економічного життя з боку політичної системи). Може бути також некомпетентність особистісних елементів даної структури. У результаті порушується баланс у функціонуванні структурних і особистісних елементів системи, поведінка стає дисфункціональною і це може призвести до соціальної напруги.

Все вищевикладене визначає особливості управління соціальними процесами.

Серед основних напрямків наукового дослідження соціальних процесів можна виділити:

• особливості індивідуальної поведінки (стереотипи, відхилення і форми прояву);

• механізми формування та розвитку соціальних спільнот;

• способи інституційного регулювання відносин соціальних спільнот і систем;

• виявлення центрів соціальної активності та дослідження процесів соціальних переміщень (міграцій, трудової мобільності, кар'єрного росту).

ТЕМА 2.

Основні аспекти моделювання соціальних процесів

1. Поняття та цілі моделювання.

2. Поняття та функції моделі.

3. Види моделювання. Типи моделей.

4. Особливості моделювання соціальних процесів.

1. Моделювання (у широкому сенсі) є основним методом досліджень у всіх галузях знань і науково обгрунтованим методом оцінок характеристик складних систем, що використовуються для прийняття рішень у різних сферах соціальної діяльності. Існуючі та проектовані системи можна ефективно досліджувати за допомогою математичних моделей (аналітичних та імітаційних), що реалізуються на сучасних ЕОМ, які в цьому випадку виступають в якості інструменту експериментатора з моделлю системи.

В даний час не можна назвати галузь людської діяльності, в якій у тій чи іншій мірі не використовувалися б методи моделювання. Особливо це відноситься до соціальної сфери, де основними є процеси прийняття рішень на основі одержуваної інформації.

Методологічна основа моделювання. Все те, на що спрямована людська діяльність, називається об'єктом (лат. objection – предмет). Вироблення методології спрямована на впорядкування отримання та обробки інформації про об'єкти, які існують поза нашою свідомістю і взаємодіють між собою і зовнішнім середовищем.

У наукових дослідженнях велику роль відіграють гіпотези, тобто певні передбачення, що грунтуються на невеликій кількості досвідчених даних, спостережень, здогадів. Швидка і повна перевірка висунутих гіпотез може бути проведена в ході спеціально поставленого експерименту. При формулюванні і

перевірці правильності гіпотез велике значення як метод судження має аналогія.

Узагальнено моделювання можна визначити як метод опосередкованого пізнання, при якому досліджуваний об'єкт-оригінал знаходиться в деякому відповідно з іншим об'єктом-моделлю, причому модель здатна в тому чи іншому відношенні заміщати оригінал на деяких стадіях пізнавального процесу. Стадії пізнання, на яких відбувається така заміна, а також форми відповідності моделі і оригіналу можуть бути різними:

1) моделювання як пізнавальний процес, що містить переробку інформації, що надходить із зовнішнього середовища, про події у ній явища, в результаті чого в свідомості з'являються образи, що відповідаютьоб'єктам;

2) моделювання, що полягає в побудові деякої системи-моделі (другої системи), пов'язаної певними співвідношеннями подоби з системою-оригіналом (першою системою), причому в цьому випадку відображення однієї системи в іншу є засобом виявлення залежностей між двома системами, відображеними у співвідношеннях подоби, а не результатом безпосереднього вивчення інформації, що надходить.

Моделювання дає можливість досліджувати складні системи, частини яких описані різними математичними методами. Використання моделювання для вивчення соціальних процесів дозволяє виявити:

– зовнішні параметри того чи іншого процесу;
– закономірності, які не доступні спостереженню в природних умовах;
– зв'язок імітуючих явищ з тими параметрами, які автоматично задаються програмою;
– пошук параметрів, що оптимізують протікання процесу, який імітується, і т.д.

У широкому сенсі *моделювання* – багатоплановий метод дослідження, один із шляхів пізнання. Воно передбачає дослідження реально існуючих предметів, явищ, соціальних процесів, органічних і неорганічних систем. А це означає, що сфери застосування моделювання, по суті, необмежені. Ними охоплюються всі процеси. Але це зовсім не означає, що моделювання є єдиним і вичерпним методом пізнання, хоча моделювання притаманне кожному пізнавальному процесу.

Моделювання – це специфічне багатофункціональне дослідження. Його головне завдання – відтворити на підставі подібності з існуючим об'єктом інший, що замінює його об'єкт (модель). Модель – е аналог оригіналу. Вона повинна мати схожість з оригіналом, але не повторювати його, так як при цьому саме моделювання втрачає сенс. Неприпустимо і довільне моделювання; в цьому випадку воно не дає належного подання про оригінал моделі і також не виконує своєї функції.

Суспільство не може розумно розвиватися, не аналізуючи себе, різні сторони своєї діяльності, не контролюючи себе, не заглядаючи вперед. Але для того щоб цей аналіз був ефективним, він повинен спиратися на точні, об'єктивні дані, тобто необхідна інформаційна база, соціальна інформація. Сукупність проблем, піддається кількісному аналізу, може бути формалізована, виражена мовою цифр і оброблена на ЕОМ за допомогою математичного моделювання. Але далеко не всі процеси суспільства піддаються кількісному виміру і контролю. Соціальні відносини відрізняються винятковою складністю, в них взаємодіють найрізноманітніші чинники, взаємовплив яких один на одного неоднозначно, варіативно; причинно-наслідкові зв'язки, їх інтенсивність і характер рухливі і невизначені.

До того ж слід враховувати, що всі соціальні процеси здійснюються людьми, а вчинки, думки, почуття людей не можуть мати числового відображення. Звідси – об'єктивно необхідними стають різні методи аналізу якісного змісту процесів у соціальній сфері.

А значить, необхідні і найрізноманітніші моделі, функціями яких є:

- поглиблення пізнання діючих систем, об'єктів;
- визначення основних параметрів, шляхів подальшого їх вдосконалення;
- проведення порівняльного аналізу оригіналу і моделі, виявлення якісних характеристик.

Моделювання виконує і важливі евристичні функції: виявляє негативні тенденції, визначає позитивні шляхи вирішення проблем, пропонує альтернативні варіанти. Моделювання виступає, таким чином, в єдності з прогнозуванням, будучи його складовою частиною.

Цілі моделювання. Враховуючи гостроту і складність соціальних процесів, моделювання переслідує такі цілі. З одного боку відобразити стан проблеми на даний, момент; виявити найбільш гострі "критичні" моменти, "вузли" протиріч, з іншого боку визначити тенденції розвитку і ті фактори, вплив яких може скорегувати небажаний розвиток; активізувати діяльність державних громадських та інших організацій і осіб в пошуках оптимальних варіантів вирішення соціальних завдань.

2. Модель – це такий матеріальний чи подумки представлений об'єкт, який у процесі дослідження заміщає об'єкт-оригінал так, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про об'єкт-оригіналі. Модель – це спрощене уявлення об'єкта, що використовується для імітації можливих станів цього об'єкта. Відомий російський вчений М. Моісеєв писав: «Модель можна розглядати як спеціальну форму кодування інформації ... За допомогою моделей зі старих знань можуть виникати нові знання. І тому одним з найважливіших завдань науки є не тільки систематизація, кодування відомої інформації та побудова на цій основі системи моделей (теорій), а й створення методів теоретичного аналізу,

тобто розкодування тієї інформації, яка потенційно міститься в моделях і призводить до отримання нового знання».

Модель в науково-дослідних програмах виконує три основні функції: *прогностичну, імітаційну і проективну*.

Прогностична функція заснована на властивості моделі передбачати ймовірні зміни властивостей і параметрів досліджуваних процесів та явищ з урахуванням дії різних факторів середовища.

Імітаційна функція концентрує увагу дослідника виключно на штучному відтворенні природних властивостей досліджуваного об'єкта, що є вкрай важливим при складному характері об'єкта і невизначеності проблемної ситуації.

Проективна функція передбачає дослідження можливості інтродукції в досліджуваний об'єкт, явище чи процес попередньо заданих властивостей, чия реалізація дозволить досягти позитивних результатів.

Яким вимогам повинна відповідати модель. Доцільно виділити дві групи вимог. По-перше, модель повинна бути більш простою, більш зручною; давати нову інформацію про об'єкт; сприяти удосконаленню самого об'єкта. По-друге, модель повинна сприяти визначенню чи поліпшення характеристик об'єкта; раціоналізації способів побудови його; управлінню або пізнання об'єкта.

Модель повинна задовольняти вимогам повноти, адекватності та еволюційності. Вона повинна забезпечувати можливість включення досить широкого діапазону змін, доповнень, щоб було можливе послідовне наближення до моделі, що задовольняє дослідника за точністю відтворення соціального об'єкта, явища, процесу.

Модель повинна бути досить *абстрактною,* щоб допускати варіювання великим числом змінних, але не настільки абстрактною, щоб виникали сумніви в надійності та практичної корисності отриманих на ній результатів.

Модель має відповідати умовам, що обмежує час розв'язання задачі.

Модель повинна орієнтуватися на реалізацію за допомогою існуючих можливостей, тобто бути здійсненноюна даному рівні розвитку суспільства.

Модель повинна забезпечувати отримання нової корисної інформації про соціальний об'єкт (явище, процес) у плані поставленої задачі дослідження.

Модель повинна будуватися з використанням усталеної термінології.

Модель повинна передбачати можливість перевірки її істинності, повноти відповідності її досліджуваному соціальному об'єкту, явища, процесу.

Розрізняють моделі матеріальні та ідеальні. Модель є одночасно і засобом, і об'єктом дослідження, який заміняє оригінал.

3. Розрізняють такі види моделювання:

- ❖ концептуальне моделювання, при якому сукупність вже відомих фактів або подань щодо досліджуваного об'єкта або системи тлумачиться з допомогою деяких спеціальних знаків, символів, операцій над ними або за допомогою природного або штучного мов;
- ❖ фізичне моделювання, при якому модель і модельований об'єкт являють собою реальні об'єкти, процеси єдиної чи різної фізичної природи, причому між процесами в об'єкті оригіналі і в моделі виконуються деякі співвідношення подібності, що випливають з схожості фізичних явищ;
- ❖ структурно-функціональне моделювання, при якому моделями є схеми (блок-схеми), графіки, креслення, діаграми, таблиці, малюнки, доповнені спеціальними правилами їх об'єднання та перетворення;
- ❖ математичне (логіко-математичне) моделювання, яке здійснюється засобами математики логіки;
- ❖ імітаційне (програмне) моделювання, при якому логіко-математична модель досліджуваного об'єкта є алгоритмом функціонування об'єкта, реалізований у вигляді програмного комплексу для комп'ютера;
- ❖ комп'ютерне (обчислювальний) моделювання, яке проводиться засобами комп'ютерних технологій (засобами обчислювальної техніки.

Перераховані вище види моделювання не є взаємовиключними і можуть застосовуватися при дослідженні складних об'єктів або окремо, або в деякій комбінації.

Математичне моделювання – словосполучення, що означає використання математичної мови та апарату для опису і подальшого аналізу основних властивостей соціальних явищ і процесів.

Математичне моделювання дає можливість замінити безпосередній аналіз основних властивостей соціальних явищ аналізом властивостей і характеристик математичних об'єктів (моделей). Математична модель соціального об'єкта – це певний набір формальних співвідношень між величинами (показниками) моделі, що розділяються на параметри і змінні. Параметри моделі зазвичай відображають зовнішні умови і слабко мінливі характеристики. Змінні моделі відображають основні для даного дослідження характеристики; аналіз зміни їх значень представляє головну мету моделювання.

Для побудови математичних моделей використовуються методи наступних розділів математики: теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії випадкових процесів, теорії дослідження операцій.

За допомогою диференціальних рівнянь (звичайних або в частинних похідних) будуються детерміновані моделі. Теорія випадкових або стохастичних процесів вивчає явища, керовані імовірнісними законами, і використовується

для побудови ймовірнісних моделей. Ці моделі виявляються досить простими для аналітичних та обчислювальних цілей і в той же час настільки змістовними що з їх допомогою вдається отримати суттєві результати. При застосуванні теорії дослідження операцій вирішуються завдання, які дозволяють визначити оптимальний варіант розвитку модельованої системи.

При математичному моделюванні можна виділити такі етапи:

1. постановка задачі;
2. формалізація моделі (побудова моделі);
3. дослідження сформованої моделі засобами конкретної математичної теорії;
4. перевірка моделі на відповідність реальній ситуації.

На першому етапі відбувається вибір об'єкта моделювання; вивчення його структури і властивостей; виділення основних факторів, що впливають на об'єкт; вибір змінних, параметрів моделі та математичного апарату для побудови та реалізації; побудова конкретних математичних структур рівнянь, алгоритмів і т.п.).

На другому етапі застосовують конкретні методи дослідження в рамках обраного математичного апарату, що *дозволяють робити висновки* про основні рисах поведінки модельованого об'єкта.

Імітаційне моделювання. Моделювання розглядається як імітаційне, а відповідна модель називається імітаційної, якщо вона настільки складна, що для отримання результатів, що стосуються її поведінки, доводиться залучати сучасні електронно-обчислювальні машини (ЕОМ) або, як зараз частіше говорять, комп'ютери. Під імітацією в такому випадку розуміється проведення на комп'ютерах різних серій експериментів з моделями, які представлені в якості деякого набору (комплексу) програм для комп'ютера. Імітаційної є та модель, яка спеціально призначена для дослідження в режимі імітації, тобто для порівняння характеристик.

Оскільки насправді неможливо уникнути випадкових зовнішній впливів на об'єкт, що вивчається, то при імітаційному моделюванні (за умови залучення ЕОМ) особливу роль має можливість багаторазового відтворення модельованих процесів з подальшою їх статистичною обробкою.

Комп'ютерне моделювання – це метод вирішення задачі аналізу або синтезу складної системи на основі використання її комп'ютерної моделі. Суть комп'ютерного моделювання полягає в отриманні кількісних і якісних результатів на основі побудованої моделі. Якісні висновки, одержувані за результатами аналізу дозволяють виявити невідомі раніше властивості складної системи: її структуру, динаміку розвитку, стійкість, цілісність та ін. Кількісні висновки в основному носять характер прогнозу деяких майбутніх або пояснення минулих значень змінних, що характеризують систему.

Використання комп'ютерного моделювання в соціальних науках досить нова ідея, хоча перші роботи в цьому напрямку були здійснені в 60-х, а широке використання комп'ютерів почалося в 90-х. Ця ідея має величезний потенціал тому, що моделювання являє собою чудовий шлях прогнозування та розуміння соціальних процесів.

Комп'ютерне моделювання надає можливість реалізувати ідею народження складного соціального поведінки з порівняно простих дій індивідів

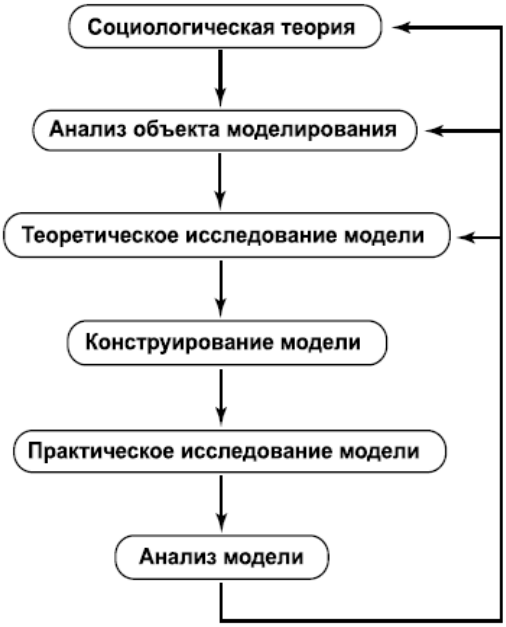


Рис.1. Етапи моделювання

Процес комп'ютерного моделювання соціальних процесів включає в себе наступні етапи:

1. Ознайомлення з соціологічною теорією, на основі якої будується модель.

2. Пошук основних елементів структури об'єкта, взаємозв'язків, керуючих факторів.

3. Побудова інформаційної моделі та аналітичних схем на основі соціологічної теорії об'єкта моделювання.

4. Теоретичне вивчення готової інформаційної моделі і побудова математичної моделі (вибір математичного апарату, формалізація структури, взаємозв'язків та елементів).

5. Побудова комп'ютерної реалізації математичної моделі (вибір методу комп'ютерного моделювання та алгоритму моделювання).

6. Практичне вивчення готової комп'ютерної моделі (робота з комп'ютерними моделями як з об'єктами дослідження: введення початкових даних, отримання результатів у вигляді графіків і діаграм, аналіз та інтерпретація отриманих даних, зміна початкових умов на основі наявних результатів для знаходження оптимального рішення).

7. У результаті аналізу комп'ютерної моделі приходимо до висновку про адекватність побудованої моделі моделюючому соціальному процесу. Далі приймається рішення: або змінити структуру побудованої моделі з метою її вдосконалення та покращення, або зробити додатковий аналіз соціологічного об'єкта, або зібрати відсутні відомості про досліджуваний соціальному процесі

Метою комп'ютерного моделювання є не тільки опис існуючих явищ у поведінці об'єкта, а й передбачення його поведінки в нестандартних ситуаціях. Одне з основних напрямів використання комп'ютерного моделювання пошук оптимальних варіантів зовнішнього впливу на об'єкт з метою отримання найвищих показників його функціонування.

Класифікація моделей.

Виділяється кілька підстав для класифікації моделей. За носієм інформації моделі діляться на *абстрактні* і *матеріальні*. Абстрактні моделі, у свою чергу, можуть бути *динамічними* і *статичними*. Динамічні моделі бувають *лінійними* і *нелінійними*. Серед нелінійних моделей виділяють: *нестійкі* і *стійкі.*

Широку популярність останнім часом набуває використання дослідниками *стохастичних* (імовірнісних) моделей, що протиставляються *детермінованим*. Детермінованою є модель з фіксованим переліком вхідних параметрів, що визначають властивість і динаміку модельованого об'єкта. У детермінованих моделях фактори, що впливають на розвиток досліджуваної ситуації, чітко визначені, а їх значення легко вирахувати. Зразком детермінованої моделі є м'ячик, який ілюструє властивості кулі. За винятком властивостей пружності дана модель один в один здатна імітувати представлений аналог.

Специфічною рисою *стохастичних* моделей є наявність елемента невизначеності, яка полягає в ймовірноснму розподілі значень факторів і параметрів, що визначають розвиток ситуації, що передбачає обов'язкову наявність в якості одного з параметрів моделі показника ймовірності. Особливо ефективним є використання імовірнісних моделей при прогнозуванні багатофакторних соціальних процесів, що розвиваються з різним ступенем інтенсивності. Так, наприклад, за допомогою стохастичної моделі можна розрахувати перспективи зростання міста з урахуванням сформованих у ньому економічних і соціальних особливостей. Спочатку виділяються блоки моделі, що становлять інформаційну базу для вирішення поставленого завдання. До них можна віднести: характеристики земельного фонду (ціни на землю, відсоток незайнятих ділянок), характеристики транспортної мережі (розміри дорожньої мережі, час, що витрачається на поїздку у центр), характеристика забудови (типи будівель, наявність нетрів, упорядкованих кварталів), характеристика сфери обслуговування та благоустрою території (соціально-побутова інфраструктура та ін.) Потім територія міста розбивається на окремі зони, за якими обчислюється ймовірність забудови кожної з них за певний період часу. Отримана модель дозволить керівникам міст ефективно виробляти цінове зонування міського прос-

тору, визначати оптимальний розмір орендної плати на об'єкти муніципальної власності, прогнозувати попит на об'єкти нерухомості.

Особливо слід виділити клас *ігрових* моделей, що дозволяють проілюструвати співвідношення між різними сценаріями у виконанні певного завдання.

Залежно від мети, що закладається у зміст моделі, виділяють *аналітичні* та *імітаційні* моделі. Аналітична модель орієнтована на пояснення зв'язків і відносин у структурі досліджуваного об'єкта на базі його детальної структуризації. Найчастіше в соціальних дослідженнях аналітична модель представлена як трендова модель, призначення якої полягає у встановленні тенденції досліджуваного процесу і в прогнозі його розвитку. Створення цілісного уявлення про об'єкт на основі визначення характерних для нього тенденцій розвитку є одним із способів діагностики властивостей цього об'єкта, факторів впливу на нього. Інформація про ці властивості і чинниках служить умовою для прогнозування соціальних подій, які супроводжують процес функціонування досліджуваного об'єкта.

Широку популярність в історії соціальної думки отримала циклічна модель соціального розвитку, що передбачає періодичне повторення певних фаз розвитку. Вперше описана Дж. Віко циклічна модель соціального розвитку була потім трансформована в різних соціальних теоріях Нового часу, придбавши особливий сенс у філософських теоріях Г. Гегеля і К. Маркса. Характерною рисою циклічної моделі є якісний спосіб її теоретичного уявлення. Найбільш поширеною формою циклічного уявлення соціальних змін стала модель спіралі, в основу механізму якої покладено гегелівський закон "заперечення заперечення», що виражає здатність історичних подій «повторюватися» на якісно новому рівні розвитку, надаючи історичного процесу спрямований сенс.

На відміну від аналітичної, імітаційна модель призначена для отримання інформації про досліджуваний об'єкт з точки зору вироблення управлінських рішень. Для цього за допомогою імітаційних моделей формується інформаційна база про властивості та структуру об'єкта з відтворенням, що лежать в їх основі, зв'язків і відносин. Отримані дані узагальнюються, групуються по блоках з виділенням у них ряду контрольних показників. Значення показників варіюється, проводиться оцінка можливих проміжних і кінцевих рішень, після чого визначається послідовність прийняття оптимальних рішень. В основі цього методу – теорія обчислювальних систем, статистика, теорія ймовірностей, математика. Імітаційні моделі не накладають обмежень на вихідні дані, висловлюючи власні властивості та ознаки безпосередньо на їх базі. Всі імітаційні моделі побудовані за типом «чорного ящика», тобто сама система, її елементи і структура представлені у вигляді такого «ящика»; є якийсь вхід, який описується екзогенними змінними (виникають поза системою під впливом зовнішніх причин), і вихід (описується вихідними змінними), що характеризує результат дії системи.

4. Одним з найважливіших видів моделювання є соціальне моделювання – це передбачення тенденцій та перспектив можливого розвитку соціальних систем, об'єктів, суспільних явищ, процесів на основі побудови моделей. Об'єктом соціального моделювання можуть бути всі соціальні системи, всі явища, які відбуваються в суспільстві. Соціальне моделювання – це визначення варіантів розвитку і видів найбільш прийнятного, оптимального, виходячи їх ресурсів, часу і соціальних сил, здатних забезпечити їх реалізацію.

Моделювання є складовою частиною процесу розробки соціального проекту. У відриві від проектування моделювання втрачає свій практичний сенс. Соціальне моделювання дозволяє враховувати різні варіанти руху і розвитку соціальних систем. Вироблення вірних прогнозів дозволяє зробити більш досконалим управління, ефективним - проектування.

У сучасних умовах уміння передбачати і прогнозувати майбутнє, а отже, і впливати на соціальні процеси стає також одним з найцінніших якостей молодого фахівця.

Моделювання соціальних процесів переслідує безліч різних цілей і завдань. Моделювання дозволяє визначити оптимальні розміри, а також передбачити поведінку системи (наприклад, системи соціального захисту багатодітних сімей в умовах ринкових відносин). У процесі моделювання аналізується цілий ряд факторів, в результаті яких обгрунтовуються різні рівні життя. У вітчизняній і зарубіжній практиці прийнято розрізняти 4 рівня життя: прожитковий мінімум, достатній, соціально необхідний і соціально комфортний. Кожен з рівнів життя містить у собі ряд показників, у зв'язку з чим при моделюванні розраховуються можливості їх здійснення (економічні, організаційні, духовні тощо); визначаються передбачувані терміни реалізації, їх прогнозне бачення.

Моделювання в соціології – це метод дослідження соціальних явищ і процесів на їх моделях, тобто опосередковане вивчення соціальних об'єктів, у процесі якого вони відтворюються в допоміжній системі (моделі), що замінює в пізнавальному процесі оригінал і дозволяє отримувати нове знання про предмет дослідження.

Є два підходи до побудови моделі соіальних процесів: *локальний* і *глобальний.* У локальному випадку розглядається поведінка декількох індивідів (особистостей) або груп і на основі їх локальної взаємодії показується загальний розвиток суспільства. Описуються об'єкти дослідження: людина, сім'я, група. Задаються можливі стани об'єктів, перерахуються фактори внутрішнього та зовнішнього впливу і визначаються правила, за якими об'єкти моделювання розвиваються і взаємодіють один з одним і з зовнішнім середовищем.

При глобальному підході розглядається весь соціум (етнос, держава, все людство), досліджуються загальні для всіх характеристики (наприклад політична система). Як правило, при глобальному підході досліджуються великі проміжки часу (кілька десятків або сотень років), так як тоді на динаміці соціуму

менш позначається поведінка окремої людини, партії і т.п. Для вивчення вибирається об'єкт дослідження, виділяється його структура (елементи, функціональні залежності, визначається інтервал часу століття, тисячоліття).

Західні дослідники розглядають дані підходи з точки зору різних рівнів абстракції, кажучи про "висхідну" (bottom up) і "низхідну" (top - down) моделі. У висхідній моделі йдуть від моделі індивідуального взаємодії до моделі групового, що в свою чергу веде до моделі суспільства в цілому. А в низхідній моделі, навпаки, від моделі суспільства в цілому "спускаються" до моделей групової та індивідуальної взаємодії.

Виходячи з вищесказаного будуються відповідні математичні моделі. Виділяються наступні критерії класифікації математичних моделей соціальних процесів:

- тип математичного апарату, за допомогою якого здійснюється формалізація процесу. Основна відмінність пов'язана з тим, чи є модель стохастичною, ймовірнісною, випадковою, тобто характер зміни точно передбачити неможливо, або детермінованою (певною, причинно-обумовленою). Інші підкласифікації відносяться до типу використовуваних змінних: неперервний або дискретний час; чи є залежна змінна неперервною, або представляє дискретний стан;

- основна функція моделей соціальних процесів у теоретичному та емпіричному дослідженні. Відповідно до цієї основної функції моделі діляться на теоретичні та емпіричні.

- зміст аналізованих процесів: процеси в малих і великих групах, процеси індивідуального і групового прийняття рішень, динаміка групової структури і т.д.;

- тип концептуалізації соціального процесу: чи розглядається цей процес як процес без управління або як керований процесс. Керовані процеси можна розділити на процеси доцільної поведінки рефлексного типу та процеси цілеспрямованої поведінки нерефлексного типу.

У соціальному прогнозуванні все більшого поширення набуває метод прогнозного моделювання соціальних процесів. Усі кількісні технології, що використовуються в прогнозуванні, по суті є методами моделювання (від лат. Modulus – міра, норма; від франц. Modele - зразок, прообраз) – однієї з основних категорій теорії пізнання, багатопланового методу, який передбачає дослідження реально існуючих предметів, явищ , соціальних процесів, органічних і неорганічних систем.

Моделювання як технологія соціального прогнозування - це дослідження об'єктів різної природи на їх аналогах (моделях) на рівні структур, функцій і результатів.

Основна відмінність моделі від оригіналу - здатність до гнучкого прогнозного зміні, не впливає на вихідні дані моделі. Соціальна модель може являти собою математичне рівняння, графічне відображення різних факторів, таблиць

взаємозалежних ознак (подій, явищ) і т.д. На відміну від фізичної соціальна модель не копіює досліджуваний об'єкт або явище, а перетворює значення одних ознак соціального, явища або процесу, обраних у якості незалежних, в значення інших ознак, обраних у якості залежних. Інформаційне значення соціальної моделі можна оцінювати за ступенем точності відображення (прогнозування) змін досліджуваних соціальних процесів і явищ (залежні ознаки) за нових значеннях незалежних ознак (об'єктивних умов).

Особлива складність моделювання соціальних процесів у тому, що значна їх частина не вкладається в рамки раніше розроблених схем і вимагає теоретичного осмислення у відповідності до існуючої соціальною дійсністю.

Моделювання соціальних відносин і структур дозволяє створити безліч варіантів моделей, що враховують вплив тих чи інших соціальних факторів (у тому різних поєднаннях) на досліджувані процеси у соціальній сфері. Основою і предметом такого моделювання є проблемна ситуація. Тому на початковому етапі необхідно визначити найбільш значиму проблему та мету її дослідження.

Будь-яка проблемна ситуація зумовлена об'єктивними і суб'єктивними чинниками. При цьому до об'єктивних факторів проблемної ситуації відносяться протиріччя між процесом розвитку і прагненням до стабілізації, між виникаючими потребами і способами їх задоволення і т.д. Суб'єктивні чинники – це розуміння значущості цієї проблемної ситуації, доцільність її вирішення, мотиви та інтереси людей, зацікавлених у її вирішенні.

Конструюючи моделі, дослідник реалізує процедуру моделювання. Умовно можна виділити кілька *видів (типів) моделей:* пізнавальні, евристичні; моделі майбутнього - прогностичні; моделі бажаного, заданого стану. Проте моделювання складних соціальних проблем поєднує в собі всі три типи моделей та основні їх функції: евристичні, прогностичні, прагматичні. Багато що залежить від мети та способу моделювання, об'єкта, наявної інформації, володіння методикою, рівня компетентності дослідника.

До соціальних моделей також відносяться: моделювання демографічних процесів, моделі екологічної безпеки, моделі соціальної адаптації мігрантів, прогностична модель доходів населення та оплата праці; модель соціальної системи, тощо.

Використання математичних моделей соціального прогнозування здійснюється у напрямку прогнозу бюджетів сімей, які розділяються за групами і складом; використання теорії ймовірностей і математичної статистики – для визначення рівня благополуччя населення.

У соціальному моделюванні застосовуються трендові та імітаційні типи моделей.

Трендові моделі. Набули поширення в прогнозуванні різних соціальних процесів. Залежними ознаками в трендових моделях є певні характеристики модельованого процесу. Єдиною незалежною характеристикою є час, який найчастіше вимірюється календарним роком. Вихідними даними для побудови мо-

делі є значення модельованої ознаки в послідовні періоди часу. Як правило, трендові моделі будуються у вигляді математичних функцій і не можуть бути засобом виявлення причинно-наслідкових зв'язків. Основна мета їх застосування — визначення тенденції досліджуваного процесу і прогнозування його розвитку в майбутньому. Головна передумова застосування трендових моделей — незмінність тенденції розвитку процесу, закладеної в його динаміці. Зміна динаміки розвитку процесу завжди зумовлена дією певної системи соціальних та економічних факторів, але саме ці фактори ніяк не фіксуються у трендовій моделі. Здебільшого трендові моделі будуються на підставі офіційної інформації, що міститься в довідниках, документах різних організацій. Саме це і визначає основні галузі їх застосування в соціології: дослідження тенденцій соціально-демографічних процесів, аналіз соціальних наслідків науково-технічного прогресу, динаміка культурних і матеріальних потреб тощо. Особливо широко застосовуються трендові моделі в глобальному моделюванні за дослідження розвитку соціальних процесів у межах окремих країн, регіонів і в загальносвітовому масштабі.Головною позитивною ознакою трендових моделей є те, що вони досить об'єктивно відображають динаміку розвитку процесу. Прогнози на основі цих моделей будуються на період від одного-двох до кількох десятків років. Проте до довгострокових прогнозів на основі трендових моделей слід ставитися обережно. Як свідчить практика, в таких випадках дуже велика вірогідність непередбачуваних змін у дії факторів, що визначають перебіг часу.

Імітаційні моделі. Як і трендові, відображають розвиток досліджуваних процесів у часі, але крім часу в них враховується чимало інших факторів, а також структура і функціонування певної системи, що зумовлює досліджувані явища. Імітаційна модель відображає взаємодію між різними факторами та об'єктами, які пов'язані з досліджуваним процесом. Предметом імітаційного моделювання може бути взаємодія людей у малих групах, взаємодія соціально-економічних факторів, що впливають на розвиток країн та регіонів, взаємодія сторін-учасниць якогось конфлікту, взаємодія учасників процесу прийняття колективного рішення та ін. Зазвичай імітаційна модель подається графічно у вигляді блок-схем, які відображають структуру взаємозв'язку її елементів, а також у вигляді рівнянь, що описують відносини між вказаними ознаками, і реалізується у вигляді електронно-обчислювальних програм. Імітаційне моделювання дає змогу розв'язати проблеми експерименту в соціологічному дослідженні, оскільки можна "програвати" різноманітні варіанти розвитку процесу, прогнозувати його перебіг за різних запрограмованих умов. Труднощі у застосуванні такого типу моделей поглиблюються необхідністю врахування величезної кількості ознак та їх взаємозв'язку. На сьогодні методи імітаційного моделювання починають ширше застосовуватися в економічних, політологічних та психологічних дослідженнях (міжособистісні стосунки в малих групах, міжнародні відносини та прийняття політичних рішень, соціально-економічний розвиток регіонів). У разі застосування імітаційної моделі на початкових етапах дослідження не слід перебільшувати її привабливість. Шлях її побудови, починаючи з ідеї машинної імітації соціальних процесів до їх практичної реалізації, є дуже при-

вабливим, проте іноді забувають, що він повинен проходити через розвинену та обґрунтовану спеціальну соціологічну теорію, розроблену до рівня закономірностей. Слід пам'ятати, що технічне забезпечення і системний аналіз ще не гарантують якості моделі. Головною умовою імітаційного моделювання передусім є глибоке і всебічне знання основних факторів досліджуваного процесу.

Штучний інтелект. Останнім часом у сфері політичного аналізу застосовуються прагматичні підходи, засновані на використанні експертних систем – комп'ютерних програм для спеціалізованих професійних предметних галузей. Такі підходи узагальнено в понятті "*штучний інтелект*". Центральним завданням при створенні подібних систем є виявлення та відтворення знань у відповідних сферах.

ТЕМА 3.
Основи когнітивного підходу

1. ***Історія розвитку когнітивного підходу.***
2. ***Когнітивні карти.***
3. ***Когнітивний підхід у соціальних дослідженнях.***
4. ***Граф-моделі соціальних процесів.***

1. Під *когнітивний підходом* розуміється вирішення традиційних для даної науки проблем методами, що враховують когнітивні аспекти, в які включаються процеси сприйняття, мислення, пізнання, пояснення і розуміння. Когнітивний підхід у будь-якій предметній галузі акцентує увагу на "знаннях", вірніше, на процесах їх подання, зберігання, обробки, інтерпретації та виробництві нових знань.

Когнітивний підхід має десятки ракурсів. Велика увага приділяється питанням розуміння природної мови, комп'ютерного перекладу, проблемам комп'ютеризації суспільства та теорії штучного інтелекту.

Чи необхідний когнітивний підхід соціальним працівникам? Відкладемо відповідь на це досить заплутане теоретичне питання до останнього пункту даної теми, а поки розглянемо вимоги практики, точніше, питання підвищення ефективності прикладних методів дослідження соціальних систем. На думку авторів цих методів, їх ефективність безпосередньо залежить від того, чи вдається досягти взаєморозуміння між учасниками проблемних ситуацій, узгодити різні точки зору, стимулювати творчий підхід до виникаючих проблем.

Когнітивний підхід може розглядатися як трамплін, що дозволяє подолати невидимі бар'єри, які нерідко виникають між людьми, що говорять на різних мовах.

Основна мета застосування когнітивного підходу для вирішення проблем, значущих для соціальних систем, причому не тільки соціальних проблем у вузькому сенсі, але також широкого спектру організаційних, виробничих, екологічних та інших комплексних проблем, що мають невід'ємну соціальну складову.

Щоб стала зрозумілою необхідність використання когнітивного інструментарію для вирішення складних соціальних проблем, нам доведеться почати з короткого екскурсу в історію розвитку когнітивного підходу і його основних принципів.

Когнітивні проблеми сприйняття, пізнання і розуміння дійсності хвилювали філософів і психологів в усі часи. Але розпочате після другої світової війни бурхливий розвиток кібернетики та обчислювальної техніки, поява в 50-і роки перших "думаючих" машин, які намагаються вирішувати логічні завдання, грати в шахи, розуміти усну та письмову мову, перекладати її на інші мови, змусили по-новому поглянути на процеси мислення, пізнання і розуміння. У середині 50-х років в центрі уваги опинився феномен знання і пов'язані з ним проблеми отримання, зберігання, обробки та репрезентації знань як в голові людини, так і в комп'ютерній системі. Психологи змушені були переглянути свої погляди на сприйняття, пам'ять, уяву, розглядаючи їх крізь призму комп'ютерної метафори діяльності мозку пристрої з переробки та зберігання інформації.

Історики вважають, що в 50-60-і роки в науці сталася когнітивна революція зміна наукової парадигми по Т. Куна. Вперше центр когнітивних досліджень був створений в Гарварді в 1960 р. До цієї дати відносять зародження когнітивної науки (Когнітологія) міждисциплінарного наукового напрямку, об'єднуючого філософію (теорія пізнання), когнітивну психологію, нейрофізіологію, антропологію, лінгвістику і теорію штучного інтелекту. Г.Гарднер запропонував схему взаємозв'язків усередині когнітивної науки, наведену на рис. 3.1 (сильні зв'язки суцільні лінії, слабкі штрихові).

Рис. 3.1. Структура когнитологии

Останній час психологи говорять уже про другу когнітивної революції, вважаючи, що комп'ютерної метафори мозку недостатньо і необхідний комплексний аналіз діяльності людини, когнітивний аналіз емоцій, настроїв. Друга когнітивна революція повертає психологію до аналізу дій активних індивідів або груп, які за допомогою матеріальних чи символьних засобів вирішують всі види завдань відповідно до локальних стандартами коректності.

Експертні системи в соціальній сфері практично не застосовуються. Фахівцям важко назвати єдину причину подібного стану справ: одні вважають, що такі системи не потрібні практиці, інші вважають, що немає експертів, а конкуренти стверджують, що не існує соціологічних знань.

Дійсно, відповідь на питання, що таке соціологічне знання, зовсім не простий. Найбільш часто зустрічається відповідь виглядає приблизно так: соціологічними знаннями є всі 10 000 книг по соціології, починаючи з О.Конта, плюс кілька мільйонів статей, опублікованих в соціологічних журналах. Когнітологія подібну відповідь задовольнити не може. Справа в тому, що для Когнітології характерний спрощений, інженерний, технологічний підхід до знань. Витяганням знань з експертів займається інженер по знаннях (когнітологія, аналітик).

Що ж таке "знання"? З точки зору фахівців з інженерії знань досить наступного визначення: "Знання це основні закономірності предметної області, що дозволяють людині вирішувати конкретні виробничі, наукові та інші завдання, тобто факти, поняття, взаємозв'язки, оцінки, правила, евристики (інакше фактичні знання), а також стратегії прийняття рішень у цій області (інакше стратегічні знання)".

Найбільш поширений розподіл знань на декларативні (знання що) і процедурні (знання як). Декларативне знання відноситься до знання теоретичного типу та передбачає вміння пояснити, чому що-небудь відбувається. Процедурне знання є практичним знанням і означає будь-які вміння, навички. Наприклад, можна добре їздити на велосипеді, але не вміти навчити когось і не знати пристрою велосипеда. Здавалося б, декларативне знання передбачає і володіння практичними навичками. Те, що це далеко не завжди вірно, випливає з прикладу, який люблять наводити американські когнітологія: прекрасні професора економіки, почавши практичну діяльність на ринку, моментально розоряються і, навпаки, успішні бізнесмени, намагаючись передати свій досвід молоді, не можуть виразно прочитати жодної лекції.

Процедурні знання в свою чергу можуть бути:

- інструктивними (знання рецептів приготування їжі, інструкцій до побутових приладів і т.д.);
- ситуаційними (вміння діяти в конкретних ситуаціях).

Останні роки увагу вчених залучив третій тип знання, які Шоттер назвав знанням "зсередини", знання культури даної соціальної системи. Такі знання можуть носити неявний характер, недоступний "непосвяченим".

Як же зберігаються знання в голові людини? Когнітологія ділять системи подання знань на три основних типи: системи правил, семантичні мережі і структури відносин.

Моделі репрезентації знань першого типу включають поняття і процедури, закодовані у вигляді правил типу умова дії. Правила можуть використовуватися для визначення категоріальної приналежності об'єктів і для передбачення того, як члени категорії будуть змінюватися у відповідь на будь-які впливи. Моделі цього типу найчастіше застосовуються в промислових експертних системах.

У моделях семантичної організації знань передбачається, що поняття існують в пам'яті як незалежні одиниці, пов'язані складною мережею зв'язків (рід–вид, частина–ціле, логічні і функціональні зв'язки).

Серед структур відносин третього типу представлення знань найбільш популярна теорія фреймів М.Мінская, в якій передбачається, що людина, намагаючись пізнати нову для себе ситуацію або по-новому поглянути на вже звичні речі, вибирає зі своєї пам'яті деяку структуру даних (образ, прототип), звану фреймом, з таким розрахунком, щоб шляхом зміни в ній окремих деталей (слотів) зробити її придатною для розуміння більш широкого класу явищ або процесів.

Для позначення організованих одиниць стереотипної інформації, які створюються людьми в типових ситуаціях, Р.Шенк ввів поняття скрипта. У вигляді скриптів в пам'яті зберігаються стандартні послідовності дій, а також "загальноприйняті" послідовності причинних зв'язків.

2. Когнітивні карти відносяться до того ж класу систем подання знань, що і фрейми. Цікаво, що даний термін з'явився задовго до виникнення когнітології в роботі видатного американського психолога, представника необіхевиоризма Е.Толмена "Когнітивні карти у щурів і людини" (1948). Аналізуючи поведінку щурів в лабіринті, Толмен дійшов висновку, що в результаті бігання по лабіринту у пацюка формується особлива структура, яку можна назвати когнітивної картою навколишньої ситуації. І саме ця приблизна карта, яка вказує шляхи (маршрути) і лінії поведінки та взаємозв'язку елементів навколишнього середовища, остаточно визначає, які саме відповідні реакції, якщо взагалі вони є, буде в кінцевому рахунку здійснювати тварина.

Толмен припустив, що когнітивні карти визначають також поведінку людей, і закликав до "розширення" когнітивних карт як до засобу боротьби з надлишком агресивності тільки так, на його думку, можна навчити людей адекватно орієнтуватися у вирішенні життєвих проблем.

Таким чином, когнітивну карту можна розуміти як схематичний, спрощений опис картини світу індивіда, точніше її фрагмента, що відноситься до даної проблемної ситуації.

Психологи останнім часом використовують цей термін у вузькому сенсі, тільки для опису просторових відносин. Представляється, що термін "когнітивна карта" значно тісніше пов'язаний із загальноприйнятим розумінням картини світу, ніж введені лінгвістами поняття "фрейм" і "скрипт". Тому надалі будемо використовувати термін "когнітивна карта" в широкому сенсі, як це передбачено Толменом і прийнято в прикладних дослідженнях.

Когнітивна карта може бути візуалізована у вигляді безлічі вершин, кожна з яких відповідає одному фактору або елементу картини світу індивіда. Дуга, що зв'язує вершини А і В, відповідає причинно-наслідковому зв'язку А> В, де А причина, В наслідок.

Зв'язок А> В називається позитивною (знак «+»), якщо збільшення А веде до збільшення (посилення) В, а зменшення А веде до зменшення В при інших рівних умовах. Знак «–» над дугою А> В означає, що зв'язок негативний, тобто при інших рівних умовах збільшення А призводить до зменшення (гальмування) В і зменшення А веде до збільшення В.

Як приклад когнітивної карти розглянемо уявлення людини, що знаходиться в депресії (рис. 3.2).

Наведена на рис. 3.2 картина світу дозволяє аналізувати динаміку розвитку депресії. Припустимо, що самооцінка хворого з якихось причин знизилася. Це веде до посилення депресії (зв'язок має негативний знак). Посилення депресії знижує можливість впоратися з ситуацією самостійно, отже, збільшується потреба в сторонньої допомоги, що в свою чергу ще більше знижує самооцінку. Процес повторюється знову і знову. Справи явно рухаються в небажаному напрямку. Щоб знайти вихід із здавалося б безвихідної ситуації, необхідно скоригувати картину світу. Слід переконати хворого в тому, що допомога інших свідчить про любов до нього друзів і родичів, тому ця допомога повинна підвищувати його самооцінку, а знак відповідної причинного зв'язку ставати позитивним. У цьому випадку розглянута вище петля дає надію, що з часом ситуація вирівняється випадкове зниження самооцінки завдяки дії петлі буде компенсовано.

Рис. 3.2. Фрагмент когнитивной карты депрессии [61]

Когнітивні карти можуть бути корисним інструментом для формування та уточнення гіпотези про функціонування досліджуваного об'єкта, розглянутого як складна система. Для того щоб зрозуміти і проаналізувати поведінку складної системи, доцільно побудувати структурну схему причинно-наслідкових зв'язків.

Розглянемо приклад когнітивної карти для аналізу проблеми споживання електроенергії в регіоні (рис. 3.3).

Ф. Роберті [26] вважає, що досліджувану проблему досить повно можна описати сім'ю факторами F, J, P, Q, R, C, U. Дугами на рис. 3.3 відзначені істотні причинно-наслідкові відносини, впливом інших можна знехтувати.

Дуга (Q, P) має знак «+», так як поліпшення навколишнього середовища веде до збільшення числа жителів, а погіршення стану навколишнього середовища викликає відтік населення. Дуга (U, Q) має знак «–», так як збільшення споживання енергії погіршує стан навколишнього середовища, а зменшення споживання енергії сприятливо позначається на її стані. Дуга (P, U) має знак «+» з огляду на те, що зростання числа жителів викликає збільшення споживання енергії і, навпаки, зменшення населення призводить до падіння споживання енергії.

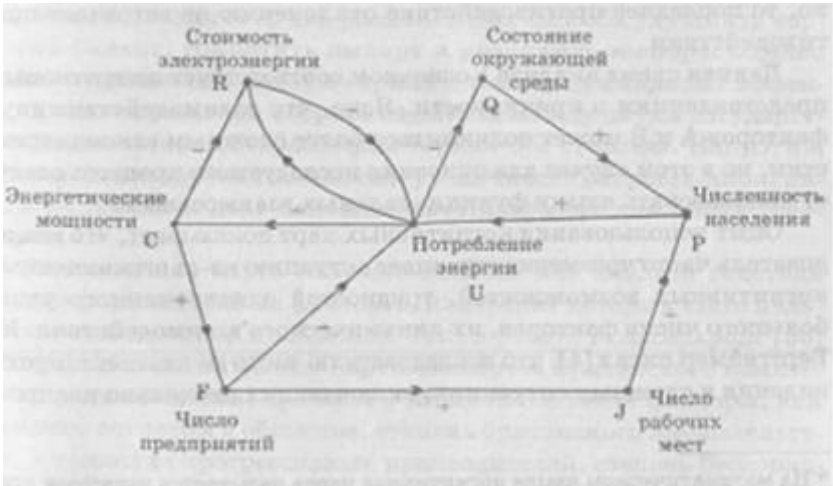


Рис. 3.3. Когнитивная карта для анализа проблемы потребления электроэнергии

Розглянемо взаємодію факторів в контурі P, U, Q, P. Припустимо, що чисельність населення зросла. Це призведе до збільшення споживання енергії і, отже, погіршить стан довкілля, що в свою чергу призведе до зменшення числа жителів. Таким чином, вплив імпульсу в вершині P компенсуватиметься дією контуру P, U, Q, P, і поведінку системи стабілізується. Три фактори P, U, Q утворюють контур, що протидіє відхиленню.

У контурі U, C, F всі дуги зі знаком «+», і легко бачити, що збільшення (зменшення) будь-якої змінної в цьому контурі буде посилено.

Контури * в когнітивної карті відповідають контурам зворотного зв'язку. Контур, що підсилює відхилення, є контуром позитивного зворотного зв'язку, а контур, що протидіє відхиленню, контуром негативного зворотного зв'язку. Японський вчений М. Маруяма назвав ці контури відповідно морфогенетичними і гомеостатичними. Маруяма довів, що контур посилює відхилення тоді і тільки тоді, коли він містить парне число негативних дуг або не містить їх зовсім, в іншому випадку це контур, що протидіє відхиленню. Дійсно, у випадку парного числа негативних дуг протидія відхиленню буде само зустрічати про-

тидію. Якщо число негативних дуг непарній, то останнє протидія відхилень не зустрічає протидії.

Дана схема аналізу в основному відповідає інтуїтивним уявленням про причинності. Зрозуміло, що взаємодія двох факторів А і В може підкорятися більш складним закономірностям, але в цьому випадку для опису досліджуваного процесу слід використовувати мови функціональних взаємозв'язків.

Досвід використання когнітивних карт показує, що дослідник часто надмірно спрощує ситуацію через обмежених когнітивних можливостей, труднощів одночасного врахування великої кількості факторів, їх динамічної взаємодії.

** На математичній мові когнітивна карта називається знаковим орієнтованим графом. Під контуром в графі розуміється замкнутий орієнтований шлях, всі вершини якого різні.*

У монографії Д.Хейса [33], присвяченій причинному аналізу, підкреслюється, що лише деякі цікаві явища в суспільних науках залежать тільки від однієї причини. Громадські явища зазвичай включають в себе багато різних подій, тенденцій, що визначаються кількома факторами, причому кожен у свою чергу впливає на деяке число інших факторів. Утворюються мережі причинних відносин, тобто причинність носить системний характер. Причинна обумовленість породжує модель соціальних явищ, а вивчення моделей забезпечує поглиблення розуміння причинних відносин, які їх породжували.

Аналізуючи свої і чужі когнітивні карти, дослідник може швидко поглибити розуміння проблеми, поліпшити якість і обгрунтованість прийнятих рішень. Крім того, когнітивна карта є зручним засобом для зміни усталених стереотипів, сприяє генерації нових точок зору. Так, у роботі М. Маруями [50] наводиться приклад помилкового переконання (когнітивного кліше), що торгівля двох країн є грою з нульовою сумою. Якщо один партнер виграє, то інший стільки ж програє. Це переконання є психологічної підгрунтям війни обмежень на ввезення товарів (імпорт).

Для країни, що має дефіцит у торгівлі з іншою країною, на перший погляд є два рівноцінні способу покращити торговельний баланс: скоротити імпорт і збільшити експорт. Однак війна обмежень веде до негативного сумарному ефекту: через скорочення обороту капіталу між двома державами, збільшення безробіття програють обидві сторони. Навпаки, взаємна експортна експансія збільшує швидкість циркуляції капіталу і дає позитивний ефект для обох держав.

Когнітивна карта особливо корисна для аналізу дії важко формалізованих чинників, вимірювання яких часто є дуже складною проблемою. Так, Р.Аксельрод досліджує когнітивні карти експертів Британського комітету у справах Сходу, при цьому враховує такі чинники, як наявність згоди в суспільстві, ступінь британського втручання, усунення прогресивних керівників, ступінь заворушень, вплив племінних відносин і т.д. (рис. 3.4).

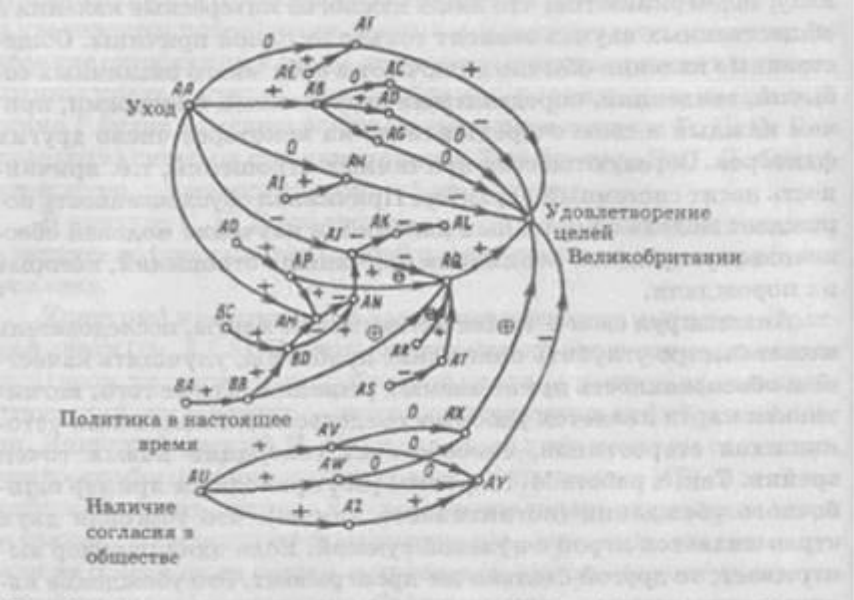


Рис. 3.4. Когнитивная карта эксперта по британской политике в Персии 1918 г.

Позначення: знак «+» позитивне ставлення, знак «–» від'ємне, нуль байдуже (немає відносини), знак © байдуже або позитивне, знак 0 байдуже або негативне; AA політика, заснована на повному догляді Великобританії з Персії; AB відхід військ з північно-західних районів; AC ймовірність серйозних хвилювань в північно-західних районах; AD ступінь заворушень; AK присутність Бахтіяр; AF збереження ролі англоперсідской нафтової компанії; AG наявність телеграфного зв'язку; AH ймовірність участі в проблемах Персії більшовиків; AI симпатії населення Персії до більшовиків ; AJ ступінь безпеки в Персії; AK вимагання в торгових караванах; AL вплив племінних відносин; AM усунення прогресивних керівників; AN реальна влада керівників Персії; AT установа конституції Персії; AP слабкість шахського сімейства; AQ здатність уряду Персії підтримувати порядок; AR відсутність прогресивних елементів в партіях Персії (немає прогресивних елементів); AS можливість контролю прогресивних елементів близькими; AT сила прогресивних елементів; AU політичне примирення з Персією; AV скасування договору з Росією 1907; AW перегляд митних тарифів; AX наявність згоди в суспільстві; AY ступінь готовності Персії йти шляхом незалежного розвитку; AZ ступінь британського втручання у справи Персії; BA сучасна політика втручання в справи Персії; BB можливість персів безперервно отримувати невеликі субсидії; НД величина боргу Персії Великобританії; BD здатність Великобританії чинити на Персію тиск.

Англійський учений К.Ідеі запропонував використовувати когнітивні карти для колективного вироблення і прийняття рішень. Поштовх до побудови теорії дало йому читання відомої роботи Келлі про психологію персональних конструктів. К.Ідеі підкреслює важливість положень Келлі про те, що ефективність взаємодії в групі осіб, які займаються прийняттям рішень, істотно залежить від того, наскільки кожен учасник розуміє способи інтерпретації ситуацій іншими членами групи. Важливу роль в отриманні консенсусу грають досягнення членами групи єдності у способі конструювання майбутніх подій, проце-

си "посилення розуміння", "зміни символів", виявлення нових точок зору. Необхідний інструмент для фіксації та аналізу резонів, думок, які часто грунтуються на досвіді та інтуїції експертів. Важливо при цьому вміти записувати суперечливі точки зору експертів без втрати багатства аргументації. Когнітивна карта дає можливість простежити взаємозв'язки між майбутнім, сьогоденням і минулим досліджуваного процесу.

Зрозуміло, що використання когнітивних карт для планування в організації може зажадати фіксації декількох тисяч взаємопов'язаних тверджень. Отже, для запису, зберігання, пошуку та аналізу інформації необхідно використовувати ЕОМ і спеціальне програмне забезпечення. В даний час розроблений ряд комерційних пакетів для аналізу когнітивних карт (NIPPER, Cope, GISMO).

3. Якщо розуміти когнітивний підхід в широкому сенсі як включення проблем пізнання, розуміння і пояснення в структуру традиційних наукових методологій, можна сміливо сказати, що кожне соціологічне дослідження в явному або неявному вигляді враховує когнітивні чинники і, отже, може бути віднесено до когнітивного напрямку в науці.

Спробуємо хоча б коротко та завідомо фрагментарно перерахувати соціологічні роботи вчених, що приділяють когнітивним аспектам особливу увагу. Мабуть, першою роботою, в якій найбільш рельєфно були розглянуті когнітивні чинники, що формують динаміку суспільства, була чотиритомна праця П.Сорокіна "Соціальна і культурна динаміка". У теорії Сорокіна історичний процес постає як послідовна зміна культур.

У 60-70-і роки когнітивним аспектам найбільшу увагу приділяють феноменологи і етнометодологи. Близькі до когнітивному підходу ідеї розвивав А.Шюца, який стверджував, що "наша буденна дійсність складається простонапросто з різних розумових схем і типів, які роблять можливими ідентифікацію і впізнавання оточуючого нас світу"

Наступний крок був зроблений відомим американським соціологом і політологом Р. Аксельродом (R. Axelrod), який розвинув апарат когнітивних карт для аналізу і прогнозування рішень, прийнятих політиками (див. рис. 3.4).

У 1973 р. американський етнометодолог А.В. Сікурел (A.V. Cicourel) випустив книгу під назвою "Когнітивна соціологія" (нагадаємо, що перша книга під назвою "Когнітивна психологія" вийшла у світ в 1967 р.). У роботі Сікурела зроблена спроба збагатити етнометодологічний підхід досягненнями когнітології кінця 60-х років. Книга присвячена в основному проблем розуміння в повсякденній мові, а також ролі невербальних комунікацій в повсякденному спілкуванні. Вихід книги Сікурела був помітною подією і привернув увагу когнітологів. Продовжуючи дослідження цієї тематики, Сікурел широко використовував методи когнітивної лінгвістики, теорії штучного інтелекту, математичного моделювання. З осені 1989 р. він є одним з керівників новоствореної кафедри

когнітивної науки, де відбуваються зустрічі працюючих на стику наук суспільствознавців, гуманітаріїв і натуралістів.

Однак приклад Сікурела не став заразливим для етнометодологів, і, хоча когнітивна соціологія існує, впливовим науковим напрямком вона поки не стала. Абсолютно по-іншому йде справа в соціальній психології, яка розсудливо підняла когнітивний прапор, віддаючи тим самим перевагу своєї психологічної складової.

Чим же розрізняються когнітивні карти експерта і рядового людини? Обидва використовують схеми, але експерт враховує більше чинників і взаємозв'язків. Категорії, використовувані експертом, носять більш абстрактний характер. "Парадокс експерта" полягає в тому, що його знання, з одного боку, більш складні і комплексні, а з іншого боку, вдається легше і швидше отримувати необхідні результати. Схеми експерта когнітивно "компактні". Схеми, використання яких у практичній діяльності часто виявляється ефективним, поступово гуртуються в єдиний конструкт. В цілому схеми в міру розвитку стають точнішими, ймовірність отримання помилкового відповіді знижується.

Однією з типових помилок буденної свідомості (як, втім, і несистемно мислячих експертів) є віра в те, що кожний наслідок має єдину причину. В результаті міркування шикуються в лінійний ланцюжок: з А випливає В, В –С, С> D і т.д., як в старовинному англійському вірші в кузні не було цвяха, тому загубилася підкова, що невблаганно призвело спочатку до втрати коня, потім гінця, депеші, програшу битви, втрати королівства. Нерозуміння того, що причинні відносини утворюють мережу взаємозв'язків, що містить контури позитивного та негативного зворотного зв'язку, нерідко веде до появи непередбачених побічних ефектів, що ведуть до трагічних наслідків.

Соціальний вимір мислення визначається різними культурами, ідеологіями, особливостями історичних періодів і соціальних груп. Основними завданнями когнітивної соціології є:

- пояснення подібності та відмінності в мисленні індивідів, аналіз соціальних конвенцій;
- аналіз соціально обумовлених процесів сприйняття інформації, виборчого фокусування уваги на окремих проблемах;
- вивчення соціальної природи класифікацій, які нерідко є не просто типологіями, а засобом конструювання значень і смислів *;
- дослідження соціальної пам'яті про значущі події, явища і процеси.

Когнітивна карта, як зручна схема візуалізації уявлень, дозволяє досліднику подолати протиставлення суб'єкта та об'єкта, врахувати вплив проведеного дослідження на досліджуваний соціальний об'єкт і контролювати зворотний вплив соціального процесу на включеного в нього соціолога.

Особливо слід підкреслити перспективність вивчення комунікативних можливостей розглянутого в даній главі когнітивного інструментарію. Саме в

комунікативній сфері знаходяться найбільш очевидні ресурси підвищення ефективності вирішення багатьох соціальних проблем.

4. Системи сіткового моделювання та управління широко використовуються в соціальній сфері, технології, проектуванні тощо. Важливим етапом сіткового моделювання є аналіз сіткового графіка за критерієм часу, що дозволяє якнайраціональніше організувати процеси, що залежать від різних робіт, при цьому роботи можуть і залежати, і не залежати одна від одної.

В основі сіткового моделювання лежить наочне зображення всього комплексу робіт у вигляді *графа*.

Граф – це схема, яка складається із заданих точок (*вершин*), з'єднаних визначеною системою ліній (векторів). Відрізки, які з'єднують вершини називають *ребрами* (*дугами*) графа.

Орієнтовним називається граф, на якому стрілками вказані напрями всіх його ребер (відомо, яка точка дуги початкова, а яка кінцева).

Контур – це кінцевий шлях, у якого початкова вершина збігається з кінцевою.

Шлях – така послідовність ребер, при якій кінець кожного попереднього ребра є початком наступного (крім безпосередньо початку та кінця самого шляху).

Сітковий графік – це орієнтовний граф без контурів, ребра якого мають одну чи декілька числових характеристик.

Основні елементи сіткового графіка – *події* (які зображуються у вигляді кружечків) і *роботи* (зображуються у вигляді стрілок – ребер).

Подія – це стан системи в момент досягнення деякої вихідної, проміжної чи початкової мети запланованого комплексу робіт.

Робота – це тривалий за часом процес, що зводиться до відбуття визначеної події.

Кожна робота вимагає затрат часу, трудових та матеріальних ресурсів.

При складанні сіткового графіка необхідно дотримуватися таких обов'язкових вимог:

1. Тільки початкова подія не має вхідних стрілок, а кінцева – вихідних.

2. Кожна робота означається двома подіями.

3. На графіку не повинно бути ізольованих ділянок, не пов'язаних з роботами в інших частинах графіка.

4. На графіку не повинно бути контурів та петель.

5. Дві події на сітковому графіку можуть бути безпосередньо зв'язані не більше, ніж однією роботою. При виникненні паралельних робіт вводиться фіктивна подія і робота.

Послідовність робіт між початковою і завершальною подією сіткової моделі, яка має найбільшу тривалість за часом, називається *критичним шляхом***.**

Часові параметри: *найбільш ранній час* та *найбільш пізній* час настання події визначають за формулами:

$$\square_j = \max\{\square_i + t_{ij}\}; \quad (3.1)$$

$$\Delta_i = \min\{\Delta_j - t_{ij}\}. \quad (3.2)$$

Найбільш ранній час настання події $\square_j$ обчислюємо в напрямку від початкової до кінцевої події, а найбільш пізній час настання події Δ_i – у зворотному напрямку – від кінцевої до початкової.

Існують принаймні два способи знаходження критичного шляху:

І спосіб (якщо кількість подій незначна): розрахувати довжину всіх можливих шляхів і вибрати шлях найбільшої довжини.

ІІ спосіб: перевірити виконання таких умов:

1) $\square_i = \Delta_i$; (3.3)

2) $\square_j = \Delta_j$; (3.4)

3) $\square_j - \square_i = \Delta_j - \Delta_i = t_{ij}$. **(!)** (3.5)

Роботи, які лежать на критичному шляху, називаються *критичними*. Такі роботи не мають резерву вільного часу, вони повинні вчасно починатися і завершуватися.

ТЕМА 4

Моделювання демографічних процесів

1. ***Загальна характеристика демографічних моделей.***
2. ***Моделі відтворення населення***.
3. ***Орієнтовна модель соціальної адаптації***.

1. Для аналізу і прогнозу розвитку стану людського суспільства (населення) використовують *демографічні* моделі. Основними кількісними характеристиками розвитку населення є: його кількість, поділ за статевовіковим складом і тип відтворення. Під типом відтворення демографи розуміють співвідношення показників народжуваності, шлюбності та смертності в суспільстві та рівень соціального контролю над цими показниками.

Існує кілька підходів до поділу громад за типами відтворення. Згідно з загальною класичною концепцією виділяють два основних типи відтворення населення.

Перший тип (до нього належить більшість держав, що розвиваються з високою народжуваністю і смертністю та низькою очікуваною тривалістю життя) відрізняється дуже високою часткою в населенні в цілому дитячих вікових груп (0-14 років) і невеликим відсотком осіб похилого віку (65 років і старше).

До другого типу належать країни, що мають невисоку народжуваність, нижчу смертність і велику очікувану тривалість життя. Для цих країн у структурі населення характерні знижена частка дітей і високий відсоток людей похилого віку.

Ряд авторів дотримується іншої класифікації типів відтворення населення. Наприклад, А. Ландрі виділяє три типи відтворення населення, притаманних відповідно: привласнюючій (або архаїчній) економіці, аграрному та індустріальному суспільству. Кожен тип відрізняється характером соціального контролю над показниками відтворення: від архаїчного рівня, що залежить від природного відбору, до повного контролю рівня народжуваності і зниження смертності за рахунок підвищення рівня життя та витрат на охорону здоров'я в індустріальному суспільстві.

Показники відтворення використовуються у демографічних моделях як *ендогенні змінні. Екзогенні* змінні визначаються поза моделлю. Вони можуть бути як *демографічними* (тривалість перебування в даному демографічному стані, вік вступу в шлюб, тривалість перебування у шлюбі, вік батьків при народженні дітей і т.д.), так і *не демографічними* (біологічними, соціально-психологічними, економічними тощо). Екзогенними змінними демографічних моделей найчастіше є змінні, отримані з даних офіційної статистики.

Система співвідношень між ендогенними і екзогенними змінними у демографічних моделях може безпосередньо випливати з сенсу змінних і бути результат якісного аналізу об'єкта моделювання; відображати деякий змістовний висновок про характер протікання демографічних процесів або бути результатом аналізу методами математичної статистики (регресії, кореляції, факторного аналізу та ін.).

Поряд з суто демографічними великого поширення набули *демо-економічні* моделі, що встановлюють взаємозв'язок зростання населення та економічного зростання.

Залежно від типу моделі система співвідношень між її змінними задасться у вигляді систем математичних рівнянь, числових таблиць або правил, за якими одні змінні визначаються на основі інших.

Надавши змінним моделі конкретні числові значення, що відповідають певному населенню на деякому етапі його розвитку, отримують *модель конкретного населення.* Моделі, значення змінних яких відображають закономірності не якого-небудь певного населення, а будь-якого населення або населення з

деякими усталеними властивостями, є *типовими.* Прикладом типових моделей є типові демографічні таблиці народжуваності і смертності.

Розрізняють демографічні *макромоделі,* що описують демографічні процеси на рівні всього населення або окремих його частин (моделі розподілів), і *мікромоделі, що* відображають демографічні процеси на рівні індивіда або сім'ї через послідовність демографічних процесів у його житті або в житті інших демографічних одиниць (моделі станів). Макромоделі описуються розподілом індивідів відповідно із заданим набором демографічних ознак. Мікромоделі характеризуються демографічним станом окремого індивіда (вступ у шлюб, народження дітей, смерть одного з подружжя тощо).

2. Для аналізу та прогнозування статевовікового складу населення використовують *відтворення населення* в неперервному та дискретному видах. *Неперервні моделі* служать для аналізу загальних закономірностей динаміки розвитку населення, *дискретні* – для практичних розрахунків.

Найпростіші моделі відтворення населення – «моделі зростання» – розглядають населення в цілому.

Таблиці народжуваності будуються на загальних, спеціальних і часткових коефіцієнтах народжуваності в проміле (у тисячних долях) за певний відрізок часу. *Загальні коефіцієнти* визначають число народжень по відношенню до загальної чисельності населення, *спеціальні* ілюструють число народжень окремо по жінках і чоловіках репродуктивного віку, *часткові коефіцієнти* визначають число народжень у окремих репродуктивних груп населення і накопичене число народжень у жінок, що досягли певного віку (кумулятивний коефіцієнт).

Таблиця коефіцієнта народжуваності

Віковий інтервал в роках	**Коефіцієнт народжень у віковому інтервалі**	**Кумулятивний коефіцієнт народжень**
15-19	175	175
20-24	494	669
25-29	294	963
30-34	152	1115
35-39	61	1176
40-44	13	1189
45-49	1	1190

До моделей, що враховують статевовікову структуру населення, відносяться дискретні матричні *моделі відтворення населення* та *інтегральне рівняння відтворення населення* (неперервна модель).

Ці моделі ґрунтуються на таких трьох принципах: все населення розбивається на групи за статевою та віковою відмінністю (використовуються дані переписів населення). Перехід сукупності індивідів в наступну вікову групу здійснюється з деяким коефіцієнтом, рівним ймовірності до життя для наступної вікової категорії. Число народжень вважається як сума народжень в кожній репродуктивної віковій групі. За основу моделей приймають зміну вікового складу жіночої частини населення. Дані по чоловічій частині населення розраховуються як вторинні, виходячи зі співвідношень жіночого і чоловічого населення.

Матричні моделі відтворення населення будуються на основі демографічних таблиць смертності і народжуваності. Таблиці складаються за даними перепису населення та статистики ЗАГСів і є системою коефіцієнтів, що визначають динаміку демографічного стану населення.

3. Орієнтовна модель соціальної реабілітації громадян, які зазнали впливу радіації. *Мета* – організація соціальної допомоги постраждалим на базі існуючих соціальних установ. *Завдання* – консультування та вирішення соціально-економічних, правових проблем, надання медико-соціальної, соціально-психологічної підтримки, оздоровлення і реабілітація. Представляється можливим створення спеціальних служб, відділень соціальної підтримки постраждалим без залучення додаткових коштів – на базі центрів соціального обслуговування за рахунок перегляду штатного розкладу. Аналіз показує що, незважаючи на загальні тенденції, соціальна реабілітація населення на радіоактивно забруднених територіях повинна проводитися з урахуванням зовнішніх і внутрішніх факторів. Для цього необхідно розділити всіх громадян на кілька груп за ступенем ризику і віком: переселенці – ліквідатори; діти – молодь – населення працездатного віку – пенсіонери.

В особливу групу належать сім'ї переселенців і ліквідаторів наслідків радіаційних аварій. Доцільність цього утворення обумовлена тим, що переселенці і ліквідатори відносяться до групи ризику і за законом мають особливий статус. В окрему групу так само слід виділити дітей, що зазнали радіаційного впливу в дошкільному віці. Фахівці вважають цю групу кризовою по критичних медичних показаннях. Технології соціальної роботи з потерпілими можуть ґрунтуватися і на роботі з сім'ями. В цьому випадку об'єктом спостереження допомоги та реабілітації повинні стати сім'ї ліквідаторів-переселенців, що проживають на даній території населення з часу аварії. Як підтверджують дослідження ці категорії населення пережили стрес і знаходяться в кризовій психологічній ситуації тривалий час. Отже, особливо потребують соціально-психологічної підтримки та реабілітації. Розуміння цієї обставини дозволяє соціальним працівникам шукати альтернативні шляхи реабілітації постраждалих. Основою методики соціальної роботи повинні стати як наступність і інтегрованість всіх видів допомоги клієнтам, так і інноваційні. Крім соціальної роботи за загальноприйнятими на-

прямками буде потрібно консультація та допомога психолога, психотерапевта, юриста, знайомих, зі специфікою обслуговування населення, що піддалося впливу радіації.

Моделювання демографічних процесів.

Співвідношення чисельності населення за віковими групами (число чоловіків на **100** жінок у цій віковій групі)

Вік	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**
0-4	104,0	103,6	102,9	103,7
5-9	103,5	103,9	102,9	103,1
10-15	103,7	103,9	103,1	102,8
16-19	100,2	104,2	105,5	105,8
26-24	97,8	101.8	101,8	101,8
26-29	96,2	97,9	100,6	100,8
36-34	82,9	96,9	99,1	99,7
36-39	64,1	96,3	94,4	97,9
46-44	62,4	85,5	98,8	95,7
46-59	62,3	63,1	90,8	90,4
56-54	62,3	60,7	75,6	87,7
56-59	50,2	55,2	54,8	81.0
66-69	53,7	50,7	50,0	58,4
76-79	48,7	45,4	40,7	38,8
86-89	41,7	37,8	35,0	30,3
90 і старше	32,7	31,4	29,1	24,5
У середньому	81,9	85,5	86,9	89,2

Вага статевовікової моделі не враховує рівень міграції населення. Міграція населення безпосередньо залежить від рівня і економічних темпів розвитку всієї країни і окремих регіонів. Облік міграції передбачає розширення демографічної моделі до демо-економічної. Для цього в економічні моделі вводяться додаткові демографічні змінні, коефіцієнти та індекси.

ТЕМА 5

Моделі життєвого циклу

1. ***Розвиток циклічних уявлень.***
2. ***Приклади циклічних моделей.***

1. Ще в давні часи було помічено, що плоди соціальної, культурної та матеріальної творчості людини не вічні. Як і будь-який організм, творіння людей народжуються, розвиваються, старіють і вмирають. Природно, з точки зору системного підходу, подібна логіка розвитку властива будь-якій соціокультурної системі, а також окремим її елементам і підсистемам.

Циклічна модель часів породжує міфи про циклічної зміни світових епох: "ночі Брахми" і "дня Брахми", гесиодівська зміна "п'яти століть" і повернення "золотого століття"; цикл епох в доколумбових міфологіях Америки, кожна з яких закінчується світовою катастрофою.

Англійська міфолог Е. Лінч запропонував відмінний від кола і циклу образ архаїчного почуття часу: маятник, який хитається між двома полюсами – вдень і вночі, життям і смертю. Уявлення про періодичні загибелі та відродження природи і людства існували і в німецькій міфології.

Циклічні теорії розроблялися багатьма філософами та істориками давнини, які прагнуть побачити певний порядок, ритм, виявити сенс в хаосі історичних подій. При цьому використовувалися аналогії з космічними ритмами, зміною пір року, біологічними циклами, кругообігом речовин у природі. Китайський історик Цянь ще до нової ери сформулював вчення про циклічні зміни "принципів", на яких спочиває державна влада. Китайські вчені спиралися на концепцію циклічно мінливого світу, що постійно повторює 64 основні ситуації. Ця концепція викладена в канонічній для конфуціанства і даосизму книзі "Всеохоплюючі зміни" (Чжоу І).

Розвиток світу, його устрій визначається взаємодією Інь і Ян – категорій, що виражають дуалізм темного і світлого, жіночого і чоловічого, земного і небесного, пасивного та активного. У різних соціальних процесах китайські мудреці виявили цикли з періодами 3, 9, 18, 27 та 30 років.

У системному аналізі під життєвим циклом системи розуміється період від зародження системи до її загибелі. У типовій моделі життєвого циклу суспільно-історичної системи Ю. В. Яковець виділяє шість послідовно змінюючих один одного фаз:

- Зародження в надрах старої системи, внутрішній латентний розвиток;
- Народження, утвердження в процесі революційного перевороту в боротьбі з відживаючою системою;

- Поширення, перетворення на переважну, пануючу систему;
- Зрілість, коли повною мірою виявляються властиві системі риси;
- Старіння, наростання суперечностей, вступ в кризу, в протиборство з вже народженою,що бореться за своє "місце під сонцем", наступною системою;
- Відмирання, існування у вигляді окремих трансформованих осколків на периферії нової системи.

Моделі життєвого циклу зазвичай є якісними і містять список фаз, етапів розвитку системи. Тривалість і кількість фаз можуть коливатися в досить широких межах. Дослідників зазвичай цікавлять якісні характеристики кожної фази і механізм чергування фаз. Нижче наведено орієнтовний список систем і підсистем, для яких розроблені моделі життєвого циклу:

1) соціокультурні системи – цивілізація, етнос, інститут, громадський рух, організація, група, сім'я, індивід;

2) елементи і підсистеми соціокультурних систем – господарський уклад, технологічний уклад, стиль у мистецтві, мода, наукова спеціальність, нові товари, інновації в усіх сферах життя суспільства, моделі.

Перш ніж перейти до викладу найбільш цікавих моделей життєвого циклу, нагадаємо, що мова йде лише про моделі, які, як і всі створіння людини, теж мають "свій життєвий цикл: вони виникають, розвиваються, співпрацюють з іншими моделями, поступаються місцем більш досконалим ".

***2**. Життєвий цикл цивілізацій*. Як вже зазначалося, розробкою моделей життєвого циклу цивілізацій займалися багато відомих істориків. Одне з найбільш фундаментальних досліджень належить англійському історику А. Тойнбі (1889-1975). Під впливом Шпенглера він розробив свою концепцію всесвітньої історії, де мова йде про 13 замкнутих цивілізацій. Тойнбі намагався вивести емпіричні закони повторюваності суспільного розвитку. Згідно Тойнбі, розвиток товариства здійснюється через наслідування. Якщо в примітивних суспільствах наслідують людям похилого віку і предкам (що робить ці товариства статичними), то в цивілізаціях наслідують творчим особистостям, що забезпечує динаміку розвитку.

Кругообіг (або життєвий цикл цивілізацій) містить, на його думку, чотири фази: виникнення (генезис), зростання, надлом і розпад.

Генезис і зростання цивілізацій обумовлений відповіддю на виклики історії. "Людина досягає цивілізації не внаслідок біологічного дарування (спадковості) або легких умов географічного оточення, а у відповідь на виклик ситуації, особливої до труднощів, надихаючої на безпрецедентне досі зусилля". У якості "викликів" розглядаються несприятливі погодні умови, напад іноземців і гниття попередніх цивілізацій.

"Зростання цивілізацій є поступальним рухом. Цивілізації розвиваються завдяки пориву, який тягне їх від виклику через відповідь подальшому викликові: від диференціації до інтеграції і знову до диференціації. Розвиток цивілізації (прогрес) являє собою кумулятивний поступальний рух, пов'язаний з територіальною експансією – від географічного центру цивілізації до периферії. Прагнення до територіальної експансії викликає до життя мілітаризм, який впродовж чотирьох або п'яти тисячоліть є найбільш загальною і поширеною причиною надломів цивілізацій. Мілітаризм надломлює цивілізацію, втягуючи локальні держави в міжусобні війни".

У фазі надлому наростають соціальні, політичні та економічні конфлікти. "В історії падіння будь-якої цивілізації можна вловити ритм розпаду ... за спадом, який починається в момент надлому, слідує пожвавлення, що збігається з моментом зародження універсальної держави. Однак цей процес завершується в свою чергу надламом, що знаменує початок нового спаду, за яким вже не настане пожвавлення, але піде на остаточний розпад".

Життєвий цикл сім'ї. З точки зору купівельної поведінки в життєвому циклі сім'ї виділяють чотири основні фази.

Фаза I – етап холостяцького життя. Інтерес до моди, покупок меблів, автомобілів, путівок на відпочинок.

Фаза II – молодята без дітей. Найвища інтенсивність покупок, у тому числі товарів тривалого користування.

Фаза III – "повне гніздо". Поява дітей веде до зростання витрат, купуються пральні машини, телевізори, дитячі товари. Незважаючи на погіршення фінансового становища купується житло. У міру зростання добробуту купується все більше товарів, які не є предметами першої необхідності.

Фаза IV – "порожнє гніздо". Діти живуть окремо. Поки глава сім'ї працює, більшість сімей задоволені своїм фінансовим становищем. Зростає інтерес до подорожей, покупок предметів розкоші. Після виходу на пенсію доходи сім'ї різко падають. Зростає попит на медичні товари та послуги.

Життєвий цикл індивіда. З соціологічної точки зору основний інтерес представляє не фізичний вік індивіда, а сприйняття соціально конструйованих категорій віку: "молодий", "людина середнього віку", "літній" і т.д.

У моделі соціального психолога Е. Еріксона життєвий цикл людини складається з восьми стадій. На кожній стадії у житті індивіда виникає специфічний криза, а перехід від однієї стадії до іншої відбувається в результаті подолання цієї кризи. Перші чотири стадії припадають на дитинство. П'ята стадія – юність пов'язана з вибором професії, пошуком роботи, вибором супутника життя. На шостій стадії (початок дорослого періоду) основне значення набувають залицяння і шлюб. Подальший розвиток індивіда визначає вирішення конфлікту між інтимністю і самотністю. На сьомій стадії (середній вік) людина освоює певну діяльність та батьківські функції, а на восьмій стадії (старість) підводить підсумки свого життя, переосмислює і переоцінює її основні події.

Конкретизуючи модель Еріксона, Левінсон стверджує, що в процесі переходу від однієї фази до іншої індивід приймає ряд ключових рішень, які зумовлюють його подальше життя на 5-7 (до 10) років.

Як стверджує Левінсон, на життєвому шляху людини є критичні точки у віці 20, 30 і 40 років, коли навколишнє соціальне середовище пред'являє йому абсолютно різні вимоги. Досягаючи ці тимчасові віхи, індивід намагається поглянути на себе по-новому, відмовитися від усталених стереотипів, що визначають за інерцією попередній відрізок життєвого шляху.

Психологам відомий так званий "криза сорокарічних", коли людині здається, що життя втрачає колишній сенс, робота стає нецікавою, а сім'я нагадує "спорожніле гніздо". У п'ятидесятирічних виникають свої проблеми. Нобелівський лауреат, економіст Ф. Модільяні, досліджуючи моделі життєвого циклу, звернув увагу на те, що рівень доходу коливається протягом життя людини і що заощадження дозволяють споживачам перерозподіляти дохід з періодів, коли він високий, на періоди, коли він низький. Плануючи вийти на пенсію в 65 років, багато хто чекає значного зниження своїх доходів. Тому більшість людей відкладають кошти до моменту виходу на пенсію. Важливим фактором є також страх перед можливими захворюваннями, помітно частішими після 50 років.

На основі цієї моделі життєвого циклу були отримані значно більш точні прогнози поведінки споживачів. Як показав Тілекоут, при істотних змінах демографічної структури суспільства подібні ефекти можуть відчутно впливати на попит, викликаючи циклічні коливання економічних показників.

Порівняльний аналіз наведених моделей життєвого циклу різнопланових соціокультурних систем дозволяє виробити ряд рекомендацій, які можуть допомогти досліднику підвищити якість моделювання:

1) недоцільно штучно збільшувати число фаз життєвого циклу. Велика частина моделей є чотирьохфазною, і розгляд понад сім фаз надмірно ускладнює аналіз;

2) більшість розглянутих соціокультурних систем має багаторівневу та багатопланову організацію. Процеси на різних рівнях йдуть з різною швидкістю. Тому доцільне більш детальне і поглиблене опрацювання механізмів функціонування різних підсистем і елементів, характерних для кожної фази життєвого циклу;

3) багато моделей страждають асиметричністю. Найбільш ретельно розглядаються етапи зростання, тоді як процесами спаду і розпаду нерідко нехтують. Епічні картини загибелі соціальних систем привертають увагу художніх натур. Вчені ж вважають за краще вивчати процеси становлення і підйому, зображуючи їх, як правило, у вигляді логістичної S-подібної кривої. (За аналогією процес спаду також зображується логістичною спадною кривою.)

ТЕМА 6.

Статистична основа моделювання соціальних процесів.

1. Динамічний та варіаційний ряди, їх характеристики.
2. Вибірковий метод.
3. Випадкові події та величини. Закони розподілу ймовірностей випадкових величин.

1. Моделювання соціальних процесів переважно ґрунтується на даних спостережень за цими процесами. На відміну від численних методів наукового пізнання при дослідженні соціальних систем принципово неможливо поставити, а тим більше відтворити певні експерименти, які б підтвердили або спростували деякі твердження, були б їх певним емпіричним обґрунтуванням. Отже, спостереження за певним соціальним процесом з метою розробки його математичної моделі передусім передбачає можливість вимірювати кількісні значення окремих характеристик (показників) цього процесу. Отримані дані прийнято поділяти на два типи: динамічний та варіаційні ряди.

Динамічний ряд – це послідовність числових значень певного показника соціального процесу, які обчислюються за однією і тією ж методикою на основі первинних даних про процес; мають одну і ту саму одиницю виміру і зібрані через рівновіддалені проміжки часу.

Варіаційний ряд – це послідовність числових значень певної характеристики, притаманної кожному об’єкту із заданої сукупності досліджуваних об’єктів, наприклад:

– довільно впорядковані послідовності чисел, які виражають вік студентів I курсу деякого ВНЗ;
– кількість працездатного населення у заданих регіонах країни;
– рівні середньої заробітної плати працівників різних галузей виробництва тощо.

Отже, варіаційний ряд є певним узагальненням поняття динамічного ряду.

Розглянемо числові характеристики динамічного ряду.

Нехай x_i – значення деякого показника соціального процесу в *i*-тий проміжок часу. Обчислення значень цього показника через *n* рівновіддалених проміжків часу з обов’язковим дотриманням зазначених вище умов визначить динамічний ряд

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_n. \qquad (6.1)$$

Значення x_i називають *i*-м рівнем динамічного ряду (6.1).

Усі рівні динамічного ряду повинні бути такими, щоб їх можна було порівнювати між собою. Наприклад, якщо йдеться про показник валового національного продукту держави, то, по-перше, всі рівні відповідного динамічного ряду повинні мати одну і ту саму одиницю виміру (гривню, долар) і по-друге,

враховувати її зміну в часі («купівельну спроможність» прийнятої грошової одиниці). Лише за таких умов мають сенс наступні числові характеристики динамічного ряду.

Середнє арифметичне $\bar{x}$ характеризує середнє значення рівнів динамічного ряду (6.1) і обчислюється за формулою

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (6.2)$$

Середні арифметичні, зокрема, використовують для проведення порівняльного аналізу кількох динамічного рядів (наприклад, середніх заробітних плат працівників різних регіонів країни).

Для характеристики зміни динамічного ряду та швидкості цієї зміни в середньому слугує середній абсолютний приріст та середній темп зростання (приросту).

Середній абсолютний приріст $\overline{Дx}$ визначає величину зміни кінцевого рівня динамічного ряду відносно початкового за такою формулою:

$$\overline{Дx} = \frac{x_n - x_1}{n-1}$$

Середній коефіцієнт зростання $\overline{k_{зр}}$ та *середній коефіцієнт приросту* $\overline{k_{пр}}$ характеризують середню швидкість зміни динамічного ряду і обчислюються за формулами

$$\overline{k_{зр}} = \sqrt[n-1]{\frac{x_n}{x_1}}\ , \qquad (6.3)$$

$$\overline{k_{пр}} = \overline{k_{зр}} - 1. \qquad (6.4)$$

Середніми темпами зростання та *приросту* називають відповідно величини

$$\overline{T_{зр}} = \overline{k_{зр}} * 100\%, \qquad (6.5)$$

$$\overline{T_{пр}} = \overline{k_{пр}} * 100\%. \qquad (6.6)$$

Відхилення від середнього рівня динамічного ряду характеризує *дисперсія*, яку прийнято позначати σ^2 або σ_x^2:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2. \qquad (6.7)$$

Легко довести, що обчислення дисперсії можна також проводити за формулою

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2. \qquad (6.8)$$

Справді, враховуючи формулу (6.2) маємо

$$\sigma^2 =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - -\frac{2}{n}\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \bar{x}^2 =$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2.$$

Середнім квадратичним відхиленням називають величину y – квадратний корінь дисперсії σ^2.

Степінь коливання (у відсотках) рівнів динамічного ряду визначається *коефіцієнтом варіації*

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} * 100\%. \qquad (6.9)$$

Розглянемо тепер числові характеристики варіаційного ряду.

Нехай послідовність (6.1) є варіаційним рядом. Число x_i, яке знаходиться на *i*-му місці цієї послідовності, називають *i*-тою *варіантою. Ранжований варіаційний ряд* можна отримати, якщо всі варіанти $\{x_i\}$ впорядкувати у зростаючому або спадаючому порядку.

Числа, які показують, скільки разів (як часто) зустрічаються окремі значення варіант, називаються *частотами*. В окремих випадках знання частот дає змогу зберігати варіаційний ряд у зручній та економній формі, суттєво скоротити обчислювальні витрати, пов'язані з визначенням його властивостей.

Нехай всі варіанти $\{x_i\}$ набувають *k* значень $\{x_j\}$ і n_j – кількість варіант, які набувають значення x_j, $j = 1, \dots, k$. Очевидно має виконуватися рівність

$$n = \sum_{j=1}^{k} n_j,$$

а всю інформацію про варіаційний ряд (6.1) містять два масиви чисел:

$$x_1,\ x_2, \dots, x_k,$$
$$n_1,\ n_2, \dots, n_k.$$

Загальна кількість чисел у масивах дорівнює 2*k* і може бути суттєво меншою за n.

Побудова цих масивів чисел $\{x_j\}$ та $\{n_j\}$ потребує виконання певної роботи – первинної обробки зібраної інформації $\{x_i\}$.

Варіаційний ряд має ті ж статистичні характеристики, що визначаються для динамічного ряду.

Середнє арифметичне $\bar{x}$ *варіаційного ряду* визначається формулою (6.2), а при відомих частотах $\{n_j\}$ значень його варіант –

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_j x_j. \qquad (6.10)$$

Дисперсія σ^2 обчислюється за формулами (6.7) або (6.8) або ж

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j (x_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j x_j^2 - \bar{x}^2. \qquad (6.11)$$

Межі значень варіант $\{x_i\}$ визначають їх найменше та найбільше значення. Різницю між цими значеннями називають *розмахом варіаційного ряду*.

Модою варіаційного ряду називають значення його варіанти, що найбільш часто зустрічається, тобто мода – це саме те значення x_j із $\{x_j\}$, якому відповідає найбільше значення n_j із $\{n_j\}$. Зазначимо, що варіаційний ряд може мати кілька мод.

2. Сукупність індивідів, для якої необхідно встановити аналітичний вид, або закон розподілу ймовірностей випадкової величини, і його параметри за однією або кількома характеристиками в результаті соціального дослідження, називається *генеральною*, а частина генеральної сукупності, результати емпіричного дослідження якої щодо законів і параметрів розподілу за цими характе-

ристиками поширюються на всю генеральну сукупність, називається *вибірковою сукупністю*, або *вибіркою*.

Вірогідність висновків про закономірності соціальних явищ залежить від ступеня якості виконаної вибірки. Вибірковий метод є основним у соціальних дослідженнях. Використання різних методик розрахунку вибіркової сукупності спричинене складністю і різноманітністю соціальних об'єктів, які описуються статистичним розподілом багатомірної випадкової величини.

За ступенем повноти охоплення дослідження генеральної сукупності індивідів розрізняють два види статистичного спостереження: суцільне і несуцільне. Часто суцільне спостереження важко або неможливо організувати і воно дорого коштує, як, наприклад, суцільний перепис населення країни. Водночас на основі організованого за законами математичної статистики вибіркового спостереження можна одержати таку саму інформацію про генеральну сукупність із задовільною точністю. Несуцільне спостереження можна здійснювати вибірковим і направленим відбором.

Розглянемо методику формування вибірки, яка включає власне-вибіркову і квотну вибірки. Остання є прикладом багатомірного якісного і кількісного аналізу. Зважатимемо на те, що сукупність індивідів опитують за їх суб'єктивними і об'єктивними властивостями, які об'єднані в основний і соціально-демографічний блоки. Перші властивості особи набуті нею від народження або в результаті тривалого навчання і виховання, а другі можуть змінюватися протягом певного часу. Властивості першого типу, такі, як стать, вік, професія, освіта, кваліфікація, віросповідання тощо, становлять соціально-демографічний блок. Оскільки ці властивості стійкі, то за ними ведуть статистики різні статистичні установи, і завдяки цьому дослідник може мати про них повну інформацію.

Мета ж прикладних досліджень соціальних процесів спрямована переважно на виявлення проблеми за суб'єктивними показниками, такими як громадська думка відносно деякої проблеми або ставлення до деякої події, явища, суб'єкта чи об'єкта, яка формується у процесі трудової і громадської діяльності й яку можна змінити під впливом зовнішніх чинників, таких як переконання, виховання, пропаганди, реклами тощо.

У вибірковому методі відтворення розподілів генеральної сукупності індивідів за об'єктивними і суб'єктивними властивостями використовують різні підходи. За об'єктивними соціально-демографічними властивостями формується зменшена модель розподілу генеральної сукупності на основі інформації статистичних відомств шляхом формування квот – зменшених „чарунок" з певними значеннями перехресних соціально-демографічних характеристик індивідів, наприклад, чисельність „чарунки", яка включає значення „бакалаврів", „20-ти років", „юнаків", становить квоту. Гратка квот відображає пропорційно зменшену структуру багатомірної генеральної сукупності. Відповідну вибірку називають *квотною*.

За суб'єктивними властивостями зменшена модель генеральної сукупності є її частиною, де відтворюється закон розподілу багатомірної сукупності загалом. Таку вибірку називають *власне-випадковою*.

На практиці вибірку часто здійснюють тільки за об'єктивними характеристиками соціально-демографічного блоку і при цьому неявно розуміють, що збереження за ними пропорцій у вибірковій сукупності забезпечує репрезентативність і за суб'єктивними характеристиками.

Якість вибірки оцінюється за двома показниками: *репрезентативністю* і *надійністю*, або *точністю* вимірювання і *гарантією* цієї точності. Логіка обґрунтування репрезентативності і надійності власне-випадкової вибірки ґрунтується на аналізі двох законів розподілу ймовірностей випадкової величини: репрезентативність пов'язана з розподілом опитуваних осіб генеральної *N* і вибіркової *n* сукупностей за шкалою заданої характеристики *x,* а надійність – з розподілом середніх арифметичних значень $\overline{x}_i$ різних вибірок. Введемо необхідні позначення для параметрів цих розподілів (див. таблицю)

Сукупність	ВВ	Імовірність	Одиниця сукупності	Кількість одиниць	Середня	Дисперсія	Середньоквадратичне відхилення
Генеральна	X	P, p	Індивід	N	a	α^2	α
Вибіркова	X	P, p	Індивід	N	$\overline{x}$	σ^2	σ
Вибірок	$\overline{X}$	P, p	Вибіркова середня	n	b	β^2	β

У конкретному дослідженні соціальних явищ реалізується одна із вибірок, параметри якої позначаємо літерами без індексів $\overline{x}, \sigma^2, \sigma$. Числові значення цих параметрів у вибірці називають *точковими оцінками* невідомих значень цих параметрів генеральної сукупності. Однак, оскільки точкові оцінки можуть істотно відрізнятися від справжніх значень генеральних параметрів, то прийнято користуватися так званою *інтервальною оцінкою* цих параметрів. Порівняємо вибіркову й генеральну середні. При точковій оцінці стверджувалося, що обчислена вибіркова середня приблизно дорівнює генеральній середній, а при *інтервальній* оцінці стверджується, що значення генеральної середньої перебуває в інтервалі між $\overline{x} - \Delta$ і $\overline{x} + \Delta$, що називається *довірчим інтервалом*. Тобто відхилення вибіркової середньої від генеральної менше величини Δ (тобто $|\overline{x} - a| < \Delta$).

Однак методи математичної статистики не дають абсолютної гарантії, що значення генеральної середньої у здійсненій вибірці потрапляє в довірчій інтервал. Можна лише стверджувати, що генеральна середня потрапляє в довірчий інтервал з деякою ймовірністю $\gamma = P(|\overline{x} - a| < \Delta)$, яка називається *довірчою*. Тому довірчий інтервал Δ називається також *граничною помилкою вибірки,* а обернена йому величина $\theta = 1/\Delta$ називається *точністю* оцінки генеральної середню. Обидва ці параметри характеризують репрезентативність вибіркового дослідження.

Довірча ймовірність характеризує *надійність* вибірки, оскільки визначає ступінь упевненості в тому, що в окремо взятій вибірці розбіжність між вибірковою і генеральною середніми не перевищує допустимої величини Δ.

За способом випадкового відбору одиниць розрізняють два види вибірок – *повторну і безповторну*. При повторній вибірці один і той же елемент може потрапити у вибіркову сукупність кілька разів, оскільки після спроби цей елемент повертається назад у генеральну сукупність і може потрапити у вибірку повторно. При безповторній вибірці кожний елемент генеральної сукупності може потрапити у вибіркову сукупність тільки один раз, оскільки після спроби він не повертається назад у генеральну сукупність. У соціологічних дослідженнях використовують тільки безповторну вибірку, оскільки кожна опитувана особа заповнює соціологічну анкету тільки один раз.

Для визначення необхідного обсягу повторної і безповторної вибірок використовуємо формули:

$$n = \frac{t^2\alpha^2}{\Delta^2}, \text{ (якщо вибірка повторна);} \qquad (6.12)$$

$$n = \frac{t^2\alpha^2 N}{\Delta^2 N + t^2\alpha^2} = \frac{nN}{n+N}, \text{ (якщо вибірка без повторна).} \qquad (6.13)$$

Для дихотомічної ознаки, підставляючи значення дисперсії $\alpha^2 = pq$ у формули (6.12), (6.13), дістаємо чисельність вибіркової сукупності при повторній вибірці

$$n = \frac{t^2 pq}{\Delta^2} = \frac{t^2 p(1-p)}{\Delta^2} \qquad (6.14)$$

і безповторній

$$n = \frac{t^2 pq}{\Delta^2 N + t^2 pq} = \frac{t^2 p(1-p)}{\Delta^2 N + t^2 p(1-p)}. \qquad (6.15)$$

Ці формули лежать в основі розрахунків складніших багатомірних вибірок з випадковим відбором одиниць дослідження.

3. У соціальній дійсності статистичні сукупності становлять люди. Центральними поняттями при вивченні таких сукупностей є *випадкові події* (ВП), *випадкові величини* (ВВ) та *випадкові функції* (ВФ).

Випадкові події пов'язані з класифікаціями за *видовими* номіналами якостей, на які розщеплюється номінал *родової* якості. Повний перелік цих номіналів становить *номінальну (класифікаційну)* шкалу. Наприклад, під випадковою подією будемо розуміти спробу, суть якої полягає в тому, що навмання вибраний з генеральної сукупності індивід, скажімо, за професією (це номінал, або класифікаційна ознака, *родової* якості «професія»), виявиться або менеджером, або вчителем, або інженером тощо (це номінали, або класифікаційні ознаки *видових* якостей «менеджер», «вчитель», «інженер» та ін., перелік яких становить номінальну шкалу).

Випадкові величини пов'язані із стратифікаціями фахівців за ступенем інтенсивності якості, і їх значення фіксуються на *ординальних (стратифікаційних*) шкалах. Наприклад, під випадковою величиною будемо розуміти спробу, суть якої полягає в тому, що навмання вибраний з генеральної сукупності операторів конкретний фахівець виявиться оператором або *I*, або *II*, або *III* розряду. Випа-

дкові величини позначатимемо великими літерами латинського алфавіту (наприклад *X, У*), а їх можливі значення – малими (*x; y*). Випадкові величини поділяються на дискретні та неперервні. *Дискретною ВВ X* називається тоді, коли вона може набувати скінченну кількість різних значень $x_1, x_2, \dots, x_n$. *Неперервною ВВ X* називається тоді, коли вона може набувати будь-яких значень у певному інтервалі числової осі.

Випадкова функція, яка виражає зміну розподілу випадкової події або випадкової величини в часі, описує статистичний соціальний процес.

Законом розподілу ймовірностей випадкових величин називається відповідність між можливими значеннями x_i ВВ *X* і її ймовірностями $p_i(X)$. Цей закон для дискретної випадкової величини можна задати у вигляді таблиці або графіка, а для неперервної – ще й аналітично, тобто у вигляді функцій. Теоретичному закону розподілу ймовірностей, який пов'язує ймовірність p_i і значення x_i ВВ *X* у теорії ймовірностей, відповідає статистичний розподіл, що пов'язує відносні частоти w_i і значення x_i ВВ *X* у математичній статистиці.

Будь-який розподіл випадкових величин (який не обов'язково підпорядковується певному закону розподілу ймовірностей) характеризується параметрами розподілу, основними серед яких є *середня арифметична*, або просто *середня* $\bar{x}$, *дисперсія* σ^2 , *середньоквадратичне відхилення* σ.

Види законів розподілу:

а) *вироджений розподіл ймовірностей випадкової величини.*

Називається ще причинним, оскільки він описує розподіл однорідної й рівноінтенсивної сукупності елементів, що є певною якістю. У свою чергу, однорідність й рівноінтенсивність визначаються певною причиною, що виключає дію випадкових чинників. У цьому випадку статистична сукупність перетворюється на детерміновану.

б) *рівномірний прямокутний розподіл ймовірностей випадкової величини.*

Виражає однакову ймовірність появи будь-якого значення x_i ВВ *X* на відрізку (*a*, *b*).

в) *закон нормального розподілу ймовірностей випадкової величини.*

Є результатом розробки Гауссом теорії похибок вимірювання і тому його ще називають *законом Гаусса*. Суть цього закону полягає в тому, що при вимірюванні деякої характеристики певної сукупності елементів завжди спостерігаються відхилення в обидва боки від норми через велику кількість неконтрольованих причин, причому, що більші ці відхилення, то рідше вони зустрічаються. Наприклад, потрібно оцінити розумові здібності людей. Інтуїтивно кожен знає, що більшість людей має приблизно однакові здібності, тобто середні, що є нормою. Люди геніальні, так само як і бездарні (без ушкодження психіки), зустрічаються приблизно однаково рідко.

Нагадаємо, що розмір середньої не є результатом випадку, а визначається об'єктивними стійкими причинами, наприклад, здібності людини визначаються природною будовою мозку. Результатом же випадку є відхилення від норми, наприклад, у результаті неконтрольованих умов розвитку людини при формуванні її розумових здібностей. Закон середньої полягає в тому, що хоча деяка

характеристика кожного елемента в сукупності залежить від випадку, її розмір для сукупності загалом від випадку не залежить, і є постійними, що дорівнює середній.

Нормальний закон описує розсіяння випадкової величин в околі середнього значення, коли малі відхилення від середньої зустрічаються часто, а великі – рідко, але однаково (симетрично) по обидва боки.

Графічно нормальний розподіл густини ймовірності ВВ X зображується симетричною дзвіноподібною кривою. Аналітично цей розподіл за законом Гаусса задається на всій числові осі властивості x й описується функцією Лапласа:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma^2}} . \qquad (6.16)$$

Як випливає з формули (6.16), цей розподіл задається двома параметрами: середньою арифметичною $\bar{x}$ і дисперсією σ^2.

Як зазначалося, у законі розподілу ВВ X міра положення – середня $\bar{x}$ – є його детермінованою частиною, а міра розсіювання – дисперсія σ^2 – статистичною. У задачах статистичного характеру доводиться вивчати особливості розсіювання, і тоді вигідно позбутися детермінованої частини. У цьому разі зручно перейти до нових змінних

$$x_{ц}=x-\bar{x},$$

які називаються *центрованими*, бо початок відліку цієї властивості розміщений у центрі розсіювання. Графічно це виражається в тому, що початок координат переноситься в точку зі значенням середньої $\bar{x}$, а аналітично – у тому, що значення середньої центрованих змінних дорівнює нулю, тобто $\overline{x_{ц}}$=0; при цьому середньоквадратичне відхилення залишається незмінним:

$$\sigma_x = \sigma_{ц}.$$

Крім того, для порівняння результатів вимірювання зручно змінити масштаб змінної і проградуювати вісь абсцис у безрозмірних одиницях, що дорівнюють середньому квадратичному відхиленню (стандарту) σ. Операція переходу до нової змінної $x_{ц}$ називається *нормуванням*, або *стандартизацією*, а змінна – *нормованою*, або *стандартизованою*:

$$x_{н} = \frac{x_{ц}}{y_{ц}} = \frac{x-\bar{x}}{y} . \qquad (6.17)$$

У нормованих змінних $x_{н}$ основні параметри розподілу $\overline{x_{н}}$=0 і $\sigma_{н}^2 = \pm 1$.

ТЕМА 7

Соціально – математична модель

1. Етапи побудови соціально-математичної моделі.
2. Відбір ознак для побудови моделі.
3. Виявлення прихованих факторів.
4. Моделі прогнозування соціальних явищ.

1. Вимірювання різних якісних та кількісних ознак, встановлення статистичного зв'язку між ними, узагальнення інформації, яку вони передають, – усе це дозволяє здійснити перехід до вищого етапу пізнання – побудови математичних моделей соціальних процесів.

Процедура побудови соціально-математичної моделі припускає проведення попереднього дослідження об'єкта, здійснюваного за допомогою причинного, кореляційного або факторного аналізу.

У ході причинного аналізу виявляються екзогенні та ендогенні параметри моделі, розкриваються функціональні залежності між змінними.

Кореляційний аналіз дозволяє встановити відповідність між складовими інформаційного поля – динамічними рядами кількісних показників.

Факторний аналіз допомагає виявити приховані чинники, здатні впливати на систему взаємопов'язаних показників, локалізуючих тип і характер описаних моделлю процесів.

У процесі побудови моделі можна виділити *етапи.*

I. *Постановка проблеми та її якісний аналіз.*

Найбільш важливим на цьому етапі є чітко сформульована сутність проблеми, прийняті допущення і ті питання, на які потрібно отримати відповіді. Цей етап включає виділення найважливіших рис і властивостей модельованого об'єкта і абстрагування від другорядних; вивчення структури об'єкта та основних залежностей, що пов'язують його елементи; формулювання гіпотез (хоча б попередніх), що пояснюють поведінку і розвиток об'єкта.

II. *Побудова формалізованої моделі.*

Це – етап формалізації проблеми, вираження її у вигляді конкретних математичних залежностей і відношень (функцій, рівнянь, нерівностей і т. д.). Етап формалізації може бути представлений у вигляді побудови діаграми причинно-наслідкових зв'язків, виділення контурів. Спочатку, як правило, визначається основна конструкція (тип) математичної моделі, а потім уточнюються деталі цієї конструкції (конкретний перелік змінних і параметрів, форма зв'язків). При цьому необхідно дотримуватися принципу наукової самодостатності, відомої у науці у вигляді «бритви Оккама», яка забороняє без особливої необхідності множити сутності. Тому, стикаючись з новим завданням, не потрібно праг-

нути «винаходити» модель; спочатку необхідно спробувати застосувати для вирішення цього завдання вже відомі моделі.

III. *Математичний аналіз моделі.*

Метою цього етапу є з'ясування загальних властивостей моделі. Тут застосовуються суто математичні прийоми дослідження. Найбільш важливий момент – доказ існування розв'язків сформульованої моделі (теорема існування). Якщо вдасться довести, що математична задача не має розв'язку, то необхідність в подальшому дослідженні з первісним варіантом моделі відпадає; слід скорегувати або постановку задачі, або способи її математичної формалізації. Аналітичне дослідження моделі має ту перевагу в порівнянні з емпіричним (чисельним), що отримані висновки зберігають свою силу при різних конкретних значеннях зовнішніх і внутрішніх параметрів моделі. Знання загальних властивостей моделі має настільки велике значення, що часто задля доведення подібних властивостей дослідники свідомо йдуть на ідеалізацію початкової моделі. І все ж моделі складних соціальних об'єктів з великими труднощами піддаються аналітичному дослідженню. У тих випадках, коли аналітичними методами не вдається з'ясувати загальні властивості моделі, а спрощення моделі призводять до неприпустимих результатів, переходять до чисельних методів дослідження.

IV. *Підготовка вихідної інформації для прийняття рішень.*

Моделювання пред'являє жорсткі вимоги до системи інформації. У той же час можливості отримання інформації обмежують вибір моделей, призначених для практичного використання. При цьому приймається до уваги не тільки принципова можливість підготовки інформації (за певні терміни), але і витрати на підготовку відповідних інформаційних масивів. Ці витрати не повинні перевищувати ефект від використання додаткової інформації. У книзі Дж. Форрестера «Динаміка розвитку міста» модель міських змін була продемонстрована на основі взаємодії трьох функціональних підсистем (ділової сфери, житлового фонду та міського населення). Для того, щоб вижити і розвиватися, місто повинно проводити самостійну політику в галузі регулювання підприємництва, розподілу, ремонту та будівництва житлового фонду, а також міграції населення. Наприклад, регулюючи якість і обсяг житлового фонду, місто здатне контролювати міграційні потоки та зайнятість, стабілізуючи тим самим соціальний порядок і умови його відтворення. Модель, яка використовується вченим, дозволила з високим ступенем надійності спрогнозувати цілий ряд соціально-економічних характеристик міського життя, як зайнятість населення, тривалість життя матеріальних фондів міста або його ділової активності.

2. Однією з найважливіших проблем попереднього аналізу початкової інформації є відбір ознак для побудови моделі. У більшості випадків наперед невідомо, наскільки вдало вибрані десятки і сотні ознак, що фіксуються, наприклад, в соціологічному дослідженні. Тому на його початкових етапах, як правило, намагаються зібрати «про всяк випадок» якнайбільше інформації

для того, щоб потім повніше й точніше описати соціальні явища і закономірності, що лежать в їх основі. Водночас постає задача сортування і ущільнення одержаних даних.

Зазвичай *залежну* змінну (*результативний показник, моделювана ознака*) позначають літерою *У*, а *незалежні змінні* (*фактори*, *аргументи, ознаки*) – літерою *X* з відповідними індексами: X_1, X_2, …, X_n.

Можна виділити два типи методів стискання простору кількості ознак при аналізі соціальної інформації. До першого типу належать *методи оцінки значущості ознак*, які дозволяють скоротити початковий набір $x_1, x_2, \ldots, x_n$ за допомогою відбору з нього ознак, які в певній мірі виявляють найбільш тісний взаємозв'язок з моделювальною ознакою.

До другого — *методи виявлення невеликої кількості прихованих, глибинних факторів* і їх зв'язків з багатьма зовнішніми ознаками, що спостерігаються і вимірюються. Основне завдання при переході до невеликої кількості факторів полягає в збереженні інформації, що міститься в ознаках, за якими ведуться спостереження.

Ще однією важливою проблемою є неоднорідність сукупності об'єктів. Структури моделей залежності *У* від X_1, X_2, ..., X_n можуть суттєво відрізнятися для різних типів об'єктів. Виявлення відносно однорідних груп об'єктів і побудова спеціальних моделей для кожної з них дозволяє значно збільшити точність прогнозування за моделлю.

Зазначимо, що відбір значущих ознак і виділення однорідних груп об'єктів часто мають важливе самостійне значення в дослідженні поза залежністю від задачі побудови моделі. Розглянемо особливості вирішення цих задач.

Специфіка оцінки значущості ознак пов'язана, передусім, з якісним описом явищ, що вивчаються. Найпростіші показники значущості ознак – коефіцієнти парного статистичного взаємозв'язку. Вибір того чи іншого коефіцієнта визначається типом ознак *X* і *У* (*X* – один з набору ознак X_1, X_2, ..., X_n).

Більш ефективним є застосування методів багатовимірного аналізу, який дає можливість оцінити значущість ознак з урахуванням взаємозв'язку між ними, а також значущість наборів ознак. Можна вирізнити три види таких методів: *методи регресійного аналізу*, *методи дисперсійного аналізу* і *методи розпізнавання образів.*

Методи регресійного аналізу використовуються для відбору значущих ознак у тому випадку, коли ознаки *У*, X_1, X_2, ..., X_n – кількісні.

Метод дисперсійного аналізу для відбору значущих ознак може бути використаний у тому випадку, якщо ознака *У* — кількісна, незалежні ознаки X_1, X_2, ..., X_n – якісні (наприклад, X_1, X_2, ..., X_n – різні варіанти організації праці на підприємствах, форми заохочення працівників, типи підприємств, *У* – рівень продуктивності праці, рівень плинності працівників). Як незалежні можуть розглядатися також дискретні кількісні ознаки, значення яких відповідають пев-

ним інтервалам їх області виміру. Метод дисперсійного аналізу може бути застосований для відбору значущих ознак і у випадку якісної ознаки $У$ і кількісних $X_1, X_2, ..., X_n$.

Однією з серйозних проблем в інтерпретації результатів дисперсійного та регресійного аналізу є статистичний взаємозв'язок між ознаками $X_1, X_2, ..., X_n$. Міцний статистичний взаємозв'язок робить хибною оцінку впливу окремих ознак на залежну ознаку $У$. Наприклад, $У$ – відсоток виконання денної норми виробітку, X_1 – загальний трудовий стаж, X_2 – кваліфікаційний розряд працівника. Оскільки з ростом трудового стажу, звичайно зростає і кваліфікаційний розряд, до чистого впливу X_1 (X_2) на У «домішуватиметься» і влив X_2 (X_1). Статистичний взаємозв'язок ознак $X_1, X_2, ..., X_n$ значно утруднює і прогнозування значень $У$ на основі регресійних рівнянь.

При відборі значущих ознак ця проблема може бути розв'язана на основі використання стандартних статистичних критеріїв, які дають змогу оцінити статистичну значущість взаємозв'язку кожного із X на $У$ за вирахуванням впливу інших незалежних показників.

Іншою можливістю розв'язання проблеми статистичного взаємозв'язку між ознаками $X_1, X_2, ..., X_n$ є перехід до меншої кількості взаємно незалежних ознак, які досить повно враховують інформацію, що міститься в початковому наборі.

Проблеми використання методів дисперсійного і регресійного аналізу також пов'язані з необхідністю передбачень про статистичні розподіли ознак (нормальність розподілу, рівність дисперсій $У$для різних значень $X_1, X_2, ..., X_n$). Статистичні гіпотези для генеральної сукупності можуть перевірятися на основі критеріїв, розроблених, в основному, для випадків виконання цих передбачень, і, звичайно, при відборі об'єктів у випадковий спосіб.

У використанні *методів розпізнавання образів* для побудови моделі прогнозу $У$ передбачається, що вся сукупність об'єктів розпадається на певні типи $S_1, S_2, ..., S_n$. Типи об'єктів відповідають або різним значенням модельованої ознаки $У$ (якщо $У$ – якісна), або різним інтервалам її області (ділянки) зміни (коли $У$ – кількісна).

Як $У$ може розглядатися, наприклад, ефективність роботи підприємства, психологічний клімат у колективі, задоволення респондента своєю роботою. Як типи об'єктів $S_1, S_2, ..., S_n$ у такому випадку можуть бути виділені типи підприємств, які справляються і не справляються з виробничим планом, типи колективів із сприятливим і несприятливим психологічним кліматом, типи працівників, задоволених і незадоволених своєю роботою тощо.

Початковою інформацією для побудови моделі, так само, як і у випадку регресійного аналізу, є виміри N об'єктів сукупності, яка розглядається, за ознаками $У, X_1, X_2, ..., X_n$. Потрібно на основі цієї сукупності об'єктів – так званої навчальної вибірки – розробити правило класифікації, яке дасть можливість на базі значень незалежних (вхідних) ознак об'єктів $X_1, X_2, ..., X_n$ відносити їх до відпо-

відних типів так, щоб величина втрат (наприклад, частота помилкових зарахувань) була мінімальною.

Розробка правила класифікації зводиться до побудови відповідних функцій від ознак X_1, X_2, ..., X_n, обчислення значень яких для об'єктів дозволяє відносити їх до відповідних типів. Вироблення такого правила класифікації називається *навчанням розпізнавання*. Якість розпізнавання (величина втрат) оцінюється на основі іншої сукупності об'єктів, які не використовувалися при навчанні, – контрольної вибірки. Модель у цьому випадку може бути представлена у вигляді таблиці відповідності між типами об'єктів у просторі ознак X_1, X_2, ..., X_n, і типами об'єктів за ознакою $У$.

Можна навести чимало прикладів соціального характеру, в яких потрібно побудувати моделі саме такого типу. Так, наприклад, у дослідженні міграції населення ставиться задача прогнозування приживальності (призвичаюваності) мігранта. Цю задачу можна розглядати як задачу розпізнавання двох типів мігрантів: «які залишаються на постійне проживання» та «які залишаються тимчасово». Незалежними ознаками можуть бути такі характеристики мігранта, як вік, сімейний стан, професія тощо. Інший приклад – задача професійної орієнтації молоді. Задача ця може зводитися до побудови правила класифікації респондентів на основі їх характеристик за певними видами професій.

Аналогічним чином може бути поставлена задача прогнозування ступеня згуртованості колективу на основі характеристик його членів і характеру їхньої діяльності, прогнозування вдалих і невдалих шлюбів у дослідженні сім'ї тощо.

На сьогоднішній день розроблено різноманітні методи розпізнавання образів. При цьому виділяються два типи основних методів – *статистичні і детерміновані*. У першому випадку задача побудови правила класифікації зводиться до оцінки параметрів статистичного розподілу для кожного з образів. Об'єкти навчальної вибірки, які відповідають кожному образу, розглядаються як підвибірка із генеральних сукупностей з певним заздалегідь відомим законом розподілу (найчастіше багатовимірним нормальним). Класифікація об'єктів здійснюється на основі статистичних оцінок вірогідності щодо належності об'єктів до цих образів.

У детермінованих методах розпізнавання інформації про об'єкти навчальної вибірки не зводиться до загальних статистичних оцінок. Застосовується інформація, пов'язана з кожним окремим об'єктом початкової сукупності. Вид обчислювальних функцій задається заздалегідь (лінійні, пунктирно-лінійні, квадратичні тощо). Внаслідок процесу навчання відшукуються конкретні коефіцієнти цих функцій.

Важливо зазначити, що в кожному з методів, які розглядалися, формалізується різне змістовне уявлення про значущість ознак. При регресійному аналізі – це значущість статистичного зв'язку ознак X_1, X_2, ..., X_n з $У$; при дисперсійному аналізі ознака вважається значущою, якщо нульова гіпотеза про рівність середніх значень $У$ (або X_1, X_2, ..., X_n) в групах, що відповідають різним значенням X відхиляється;

при розпізнаванні образів – точність прогнозу *У* на основі ознак X_1, X_2, ..., X_n. Тому застосування різних методів відбору значущих ознак може давати абсолютно різні результати. Вибір конкретного методу відбору значущих ознак зазвичай зумовлюється цілями дослідження, типом моделі, яка використовується. При побудові регресійних моделей доцільно застосовувати методи відбору ознак, розроблені в рамках регресійного аналізу. Застосування методів розпізнавання образів з використанням точності прогнозу *У* як критерію значущості ознак для контрольної сукупності об'єктів може мати перевагу в тому випадку, якщо дослідження має в основному прикладний характер і спрямоване на прогноз значень показників, що вивчаються.

Але в багатьох випадках перевага того чи іншого методу відбору ознак усетаки заздалегідь не відома. Тому за наявності різних методів оцінки значущості ознак у математичному забезпеченні ЕОМ доцільне їх паралельне застосування. Відбір одних і тих же ознак у застосуванні різних методів – важливе свідчення їх значущості. Різні варіанти наборів значущих ознак можуть порівнюватися за точністю прогнозу показника *У,* який моделюється.

3. Фіксуючи велику кількість різноманітних ознак в об'єктах сукупності, яку вивчаємо, ми, як правило, припускаємо, що вони є відображенням невеликої кількості прихованих, глибинних властивостей об'єктів. Інколи нам наперед відомо, що це за властивості, і процедура фіксування ознак полягає в тому, щоб їх виміряти.

Проте в деяких випадках можна припустити наявність прихованих, глибинних властивостей, маючи про них лише туманне уявлення. Така ситуація доволі часто виникає в соціальних дослідженнях внаслідок відсутності розробок спеціальних теорій, а також змістових гіпотез відносно досліджуваних проблем. Для того, щоб знайти ці можливості і з їх допомогою стисло і наочно описати соціальні об'єкти застосовуються наступні метои знаходження прихованих факторів: *факторний аналіз, кластерний аналіз ознак* і *багатовимірне шкалювання.*

За допомогою *факторного аналізу* кожна з ознак подається у вигляді лінійної комбінації відносно невеликої кількості факторів. Число факторів, як правило, задається заздалегідь, коефіцієнти при них добираються таким чином, щоб сумарна похибка від заміни багатьох ознак невеликим числом факторів була мінімальною.

Кластерний аналіз грунтується на виявленні груп ознак, що тісно корелюють, для кожної з яких віднаходиться свій фактор.

Методами багатовимірного шкалювання знаходимо зв'язок між факторами і ознаками в складнішій, нелінійній формі. Ці методи є загальнішими і менш опрацьованими, ніж методи факторного аналізу.

Великі труднощі (особливо у випадку факторного аналізу і багатовимірного шкалювання) можуть виникнути при *змістовій інтерпретації факторів.* Так, в одну групу можуть потрапити освіта, дисципліна, продуктивність праці, кількість раціоналізаторських пропозицій і психологічна нестійкість. Визначити прихований фактор, який лежить в основі близькості такого роду ознак, буває

дуже важко. Формальне застосування цих методів призводить не тільки до стискання інформації, але й до втрати її змістової наочності і значущості.

4. У соціальних дослідженнях вирізняють два види моделей, які застосовуються для прогнозування: *трендові (екстраполяційні)* і *факторні (аналітичні).*

В основі побудови трендових моделей лежить вивчення динаміки будь-якого показника, виявлення тенденції його зміни і встановлення динамічного (часового) ряду кількісних даних, що до нього стосуються, які можна екстраполювати в майбутнє за тією чи іншою математичною формулою. Виявити тенденцію зміни – значить встановити математичну залежність, на основі якої можна з певним ступенем точності розрахувати кількісний вираз показника, що нас цікавить, на ту чи іншу дату передбачення в прогнозі.

У розпорядженні дослідника є великий запас математичних функцій, серед них слід відшукати кращу від інших, яка описує процес, що вивчається. Г. Хауштейн нарахував і описав близько 70 формул приблизно за 17 основними функціями, придатними для прогнозування. На практиці, одначе, прогнозистам доводиться зустрічатися лише з декількома типами змін, для кожної з яких дібрана відповідна функція.

Є *три основних типи динаміки змін: процеси з постійним середнім рівнем, з рівнем, який має тенденцію до підвищення, і з рівнем, який має тенденцію до пониження.* Особливості коливань навколо середнього рівня, а також особливості характеру підвищення чи пониження рівня утворюють ще декілька основних підтипів. Далі йдуть окремі різновиди, для опису яких досить відповідної модифікації тієї чи іншої функції.

Екстрапольовані процеси показують наростання (чи спадання) або з постійною швидкістю, або з якимось прискоренням (чи уповільненням). Для першого, лінійного типу процесу характерна зміна показника (змінної) за кожний період на одну і ту ж величину.

Такі процеси описуються рівнянням, згідно з яким шуканий показник визначається додаванням величини показника в початковий момент і величини його приросту за одиницю часу, помноженій на кількість одиниць часу, що відповідає даті передбачення в прогнозі.

Другий різновид моделей – факторні. В основі їх побудови лежить виявлення механізму взаємодії різних факторів, залежності одного чи декількох вихідних даних від групи вхідних. Цей вид моделей досі мав досить обмежене застосування в соціальних дослідженнях через складності виділення найсуттєвіших факторів і врахування їх взаємовпливу. Проте при наявності достатньої інформації про закономірності взаємодії якомога ширшого кола факторів такі моделі можуть виявитися досить ефективними для цілей соціологічного прогнозування.

Так, наприклад, можна розробити вельми змістовну модель перспектив розвитку тієї чи іншої соціальної групи, якщо взяти до уваги, як впливає соціальне становище цієї групи на структуру прибутків і витрат її членів, на їх ціннісні орієн-

тації, як впливає рівень добробуту на зрушення в системі соціальних потреб членів цієї групи, як відображається розвиток економіки і культури на професійній орієнтації членів групи тощо.

При такого роду прогнозах припускається, що всі інші суттєві фактори, виключені з розгляду, залишаються постійними на весь період попередження (передбачення). Це умовне допущення важливо постійно мати на увазі, щоб неминуче спрощення складного соціального процесу, характерного для будь-якої моделі, не призводило до неприпустимої трансформації висновків дослідника при інтерпретації результатів моделювання.

Побудова факторних моделей заснована на методах статистики, математичної статистики, теорії кібернетики, теорії експерименту, теорії дослідження операцій, теорії прийняття рішень тощо. У методиці розробки тієї чи іншої моделі, як правило, використовується цілий комплекс методів, які стоять на озброєнні всіх або більшості згаданих дисциплін. Це стосується методів *кореляційного, дисперсійного* і *факторного аналізів* з метою виявлення суттєвих ознак досліджуваних об'єктів та зв'язків між ними.

Інколи для підвищення ефективності моделювання доводиться обмежуватись виявленням не всіх основних залежностей, а лише деяких, найважливіших з погляду мети і завдань дослідження. Так, *феноменологічні моделі* описують не механізм взаємовпливу факторів, а лише форму і міру інтенсивності (важливості) зв'язку між ними. Такий підхід є переважним, коли невідомі закономірності взаємодії факторів. Він дозволяє, до того ж, оперувати набагато ширшим набором факторів.

Найважливішою проблемою побудови факторних моделей є відбір факторів для аналізу, від чого в значній мірі залежить ступінь повноти і надійності (якості) моделі.

Яким би обсягом інформації, яку б обчислювальну техніку не мав у своєму розпорядженні дослідник, він все одно змушений обмежуватися кінцевим – з необхідності не дуже великим – числом змінних і переліком факторів. Тому вже на стадії попереднього якісного аналізу доводиться відокремлювати основні фактори від величезної кількості другорядних. Водночас одні і ті ж фактори в дослідженні одного процесу можуть виступати як основні, а іншого – розглядатися як другорядні. Відбір необхідних факторів являє собою одну з найскладніших процедур побудови факторних моделей.

Практикою вироблено декілька ефективних прийомів відбору факторів. Деякі з них використовуються в рамках методу так званої *матриці взаємного впливу (інтеркореляції) факторів,* інші – при використанні методу *граф-зв'язку,* треті – в рамках методу *формалізованого сценарію* тощо. Використовуються також методи *опитування експертів,* від яких у цьому випадку потрібна не тільки думка про те, як будувати початковий перелік факторів, що включати до нього, але й оцінка «ваги» кожного фактора.

Ще одна проблема побудови факторних моделей — *відмежування одна від одної залежних і незалежних змінних.* Особливе значення має ця проблема для *соціологічного прогнозування.* Змішування змінних може дезорієнтувати прогностичні дослідження. Саме незалежні змінні складають головний прогностичний потенціал моделі. Якщо, наприклад, у прогнозуванні попиту на продукти (залежна змінна) розглядати динаміку росту прибутків населення і обсяг виробництва продуктів харчування (незалежні змінні), то розраховувати на надійний прогноз за профілем дослідження можна в тому випадку, коли є надійна інформація з прогностичного фону, тобто з незалежних змінних. У протилежному випадку прогностичний потенціал моделі різко падає. Разом з тим, у дослідженнях складних соціальнихпроцесів часто буває важко правильно відокремити профільні показники від фонових (незалежних). Ця процедура заслуговує на дуже серйозну увагу методистів.

На відміну від трендових і факторних моделей у прогнозуванні соціальних процесів порівняно рідко застосовуються (хоч з успіхом могли б застосовуватися) численні різновиди моделей, які з відомими застереженнями можна об'єднати під загальною умовною назвою *евристичні.* Маються на увазі моделі, в яких прогностичний ефект досягається не з допомогою дедуктивних висновків з виявленого характеру трендів або взаємовпливу факторів, а на основі спостереження за змінами, які проходять у системі, що описується моделлю. До такого роду моделей належать, наприклад *імітаційні.* А також (у широкому розумінні цього поняття) — *ігрові* та деякі інші різновиди моделей.

Типова імітаційна модель – схема організації заводу або інституту, з допомогою якої можна уявити перспективи розвитку об'єкта у випадку зміни того чи іншого компонента структури, що описується моделлю.

Типова ігрова модель – «штабна військова гра», що дозволяє робити висновки прогностичного характеру про перспективи ходу і результату дій, якщо вони розгорнуться в рамках, передбачених моделлю.

Обидві моделі потребують розвинутого математичного апарата, а в ідеальному варіанті взагалі уявляються певною системою математичних рівнянь.

Однак не слід перебільшувати реальні можливості застосування моделей у сфері прогнозування. Необхідно прагнути застосовувати їх комплексно як одну з одною, так і з методами опитування населення і експертів, щоб недоліки одних методів певною мірою компенсувалися перевагою інших.

Потрібно зауважити також, що в науково-технічній, соціальній, демографічній і низці інших порівняно розвинутих сфер прогнозування застосовується багато методів моделювання тільки при дуже розширеному трактуванні поняття «модель». Це стосується різних *матричних методів, сценарних методів (неформалізованих і формалізованих прогностичних сценаріїв), граф-моделей, методів побудови «дерева перспективних проблем» і «дерева цілей», морфологічного аналізу* тощо.

Те ж саме можна сказати і про методи застосування з прогностичною метою *патентної (або еквівалентної їй за значенням) інформації, метод контек-*

стуального картографування, метод історичної аналогії, метод прогнозування за випереджальними стандартами тощо.

Для орієнтовного уявлення про «питому вагу» найважливіших методів прогнозування в практиці прогнозних розробок можна послатися на зведену таблицю американського прогнозиста Дж. Макгейла, котрий обстежив декілька сотень науково-дослідних установ Заходу і окремих вчених різних країн світу, спеціально зайнятих розробкою прогнозів (цифри показують «питому вагу», тобто міру поширення того чи іншого методу згідно з результатами обстеження).

-	Наукові установи (%)	Окремі вчені *(%)*
1 . Панельні опитування експертів	10,0	8,0
2. Екстраполяція	8,8	8,5
3. Індивідуальні експертні оцінки	8,7	8,2
4. Статистичні моделі	8,4	6,5
5. Мозкова атака	8,1	7,6
6. Складання сценаріїв	7,9	10,6
7. Імітаційні моделі	6,2	5,6
8. Історичні аналогії	5,9	7,7
9. Ймовірнісні оцінки	5,8	5,9
10. «Дельфійська техніка»	5,5	5,6
11. Операційні моделі	5,1	4,4
12. Матриці інтеркореляції	3,9	3,9
13. Причинно-наслідкові (ковзальні) моделі	3,9	4,1
14. Сітьові моделі	2,8	2,7
15. «Релевантне дерево» (проблем і цілей)	2,4	2,5
16. Ігрові моделі	2,3	2,5
17. Контекстуальне картографування	2,1	2,4
18. Інші методи	2,2	3,3

З таблиці випливає, що найбільшого поширення в сучасній світовій практиці прогнозування набули *методи опитування експертів, екстраполяції і складання сценаріїв (за сукупністю перерахованих різновидів).* Решта методів мають поки що дуже обмежене поле застосування, а переважна більшість із описаних у літературі (приблизно півтори сотні методів, зокрема – методи опитування населення) – не вийшли ще, по суті, за рамки експериментальних досліджень.

ТЕМА 8

Використання регресійного аналізу для побудови соціометричної моделі

1. Класична модель лінійної регресії.

2. Параметризація соціометричної моделі та перевірка її на адекватність.

3. Багатофакторна соціометрична модель.

4. Побудова нелінійних регресійних залежностей.

5. Крива Енгеля.

6. Трендові моделі. Метод ковзної середньої.

1. У багатьох практично важливих задачах потрібно встановити та оцінити залежність деякого соціального показника від одного або кількох інших показників. Проте будь-які соціальні показники, як правило, перебувають під впливом випадкових чинників, а тому з математичної точки зору вони інтерпретуються як випадкові величини.

З теорії ймовірностей відомо, що випадкові величини можуть бути або незалежними, або пов'язані функціонально, або ж між ними існує стохастична залежність. Строга функціональна залежність в соціальних явищах реалізується рідко. Переважно спостерігається так звана стохастична залежність, коли зміна можливих значень однієї випадкової величини (внаслідок проведення випробувань) призводить до зміни *умовного закону розподілу імовірностей* іншої. Частковим випадком стохастичної залежності є кореляційна залежність, коли зміна можливих значень однієї величини приводить до зміни *умовного математичного сподівання* іншої випадкової величини.

Нехай з певних міркувань встановлено, що деякий соціальний показник x впливає на інший показник y. Статистичні дані по кожному із них інтерпретуються як деякі реалізації (можливі значення) випадкових величин X та Y. Тоді кореляційну залежність між ними або *залежність в середньому* можна зобразити у вигляді співвідношення

$$M(Y \mid x) = f(x), \tag{8.1}$$

де $M(Y \mid x) = M(Y \mid X = x)$ – умовне математичне сподівання випадкової величини Y при умові, що X набирає можливе значення x. Функція $f(x)$ називається *функцією регресії* Y на X, а її графік – *лінією регресії*. При цьому X називається *незалежною змінною*, а Y – *залежною*. Розглядаючи залежність двох випадкових величин, говорять про *парну регресію*.

Залежність Y від кількох змінних, що описується рівнянням

$$M(Y \mid x_1, x_2, ..., x_m) = F(x_1, x_2, ..., x_m), \tag{8.2}$$

називають *множинною регресією*.

Оскільки реальні (спостережені) значення залежної змінної не завжди співпадають із умовним математичним сподіванням, то ліві частини рівнянь (8.1) і (8.2) можна записати таким чином:

$$M(Y \mid x) = Y - U, \qquad M(Y \mid x_1, x_2, ..., x_m) = Y - U,$$

де U – випадкові величини. Із врахуванням цих співвідношень рівняння (8.1) і (8.2) набудуть такого виду:

$$Y = f(x) + U, \tag{8.3}$$

$$Y = F(x_1, x_2, ..., x_m) + U, \tag{8.4}$$

Зв'язки між залежною та незалежною (незалежними) змінними, що описуються співвідношеннями (8.3) або (8.4) називаються *регресійними моделями (рівняннями)*. При цьому модель (8.3) називається *однофакторною*, а (8.4) – *багатофакторною (m-факторною).*

Отже, під регресією розуміють односторонню стохастичну залежність однієї випадкової змінної від однієї чи декількох інших випадкових змінних. Наприклад, при визначенні залежності обсягу податкових надходжень (y) від ставки податку (x) мова йде про визначення одностороннього зв'язку, тобто про регресію. Одностороння стохастична залежність виражається за допомогою функції, яка на відміну від строгої математичної залежності називається функцією регресії чи просто регресією.

Принциповою різницею між строгою функціональною залежністю та функцією регресії є те, що у першому випадку аргумент (незалежна змінна) повністю визначає значення функції, і для неї існує обернена (наприклад, функція $y = x^2$, тоді $x = \sqrt{y}$). Функція регресії цією властивістю не володіє. Тільки в граничному випадку, коли стохастична залежність переходить у функціональну, перехід одного рівняння регресії у друге стає можливим, тобто починає проявлятися властивість зворотності. Якщо ж між явищами відсутній функціональний зв'язок, а має місце тільки стохастичний, то функція регресії буде незворотною. Це зумовлено, по-перше, самою структурою явища, яке визначає напрямок зв'язку; по-друге, постановкою задачі дослідження, при якому переслідується певна визначена мета: як за значенням однієї змінної, що вибрана аргументом, передбачити відповідне значення іншої (функції); по-третє, способом вимірювання відхилень емпіричних точок. Виходячи з вище приведеного, встановлюється регресія y на x чи x на y, в залежності від того, яка стохастична залежність досліджується: y на x чи x на y, відповідно.

Необхідно також зрозуміти причини введення в регресійну модель випадкової складової U, яку називають *відхиленням, залишком* або *збуренням*. Серед них виділяють:

1) *Уведення в модель не всіх пояснюючих змінних*. Будь-яка регресійна модель – це спрощення реальної ситуації. Остання завжди є складною компо-

зицією різних чинників, багато з яких у моделі не враховуються, що призводить до відхилення реальних значень залежної змінної від її модельних (розрахункових) значень. При цьому у деяких випадках заздалегідь невідомо, які чинники за умов, що склалися, насправді є визначальними, а якими можна знехтувати.

2) *Агрегування змінних*. У багатьох випадках запропонована модель – це спроба об'єднати разом деяку кількість соціальних показників. Оскільки окремі показники мають різні характеристичні параметри, тому спроба визначити співвідношення між ними носить наближений характер. Існуюча розбіжність при цьому приписується наявному збуренню.

3) *Неправильний вибір функціональної форми моделі*. Функціональне співвідношення між *y* та *x* математично може бути визначене неправильно. Наприклад, фактична залежність не є лінійною, а може бути більш складною

4) *Помилки вимірювання*. Якою б якісною не була модель, помилки вимірювання змінних впливатимуть на розбіжності між модельними та емпіричними даними.

5) *Обмеженість статистичних даних та їх випадковий характер*.

6) *Непередбачуваність людського фактора*.

Соціометрична модель – це *функція (скалярна або векторна),* яка описує кореляційно-регресійний зв'язок між соціальними показниками, причому залежно від причинних зв'язків між ними один показник розглядається як залежна змінна, а інші – як незалежні.

У загальному випадку соціометрична модель має такий вигляд:

$$Y = f(x_1, x_2, ..., x_m, a_0, a_1, ..., a_k, U), \qquad (8.5)$$

де Y – залежна (пояснювана, регресант, екзогенна, результативна) змінна, $x_1, x_2, ..., x_m$ – незалежні (пояснюючі, регресори, ендогенні) змінні, $a_0, a_1, ..., a_k$ – параметри (невідомі) моделі, U – випадкова величина, яка називається відхиленням (залишком або збуренням).

Серед основних етапів побудови саме соціометричної моделі виділимо такі:

I. Ідентифікація змінних.

II. Специфікація моделі.

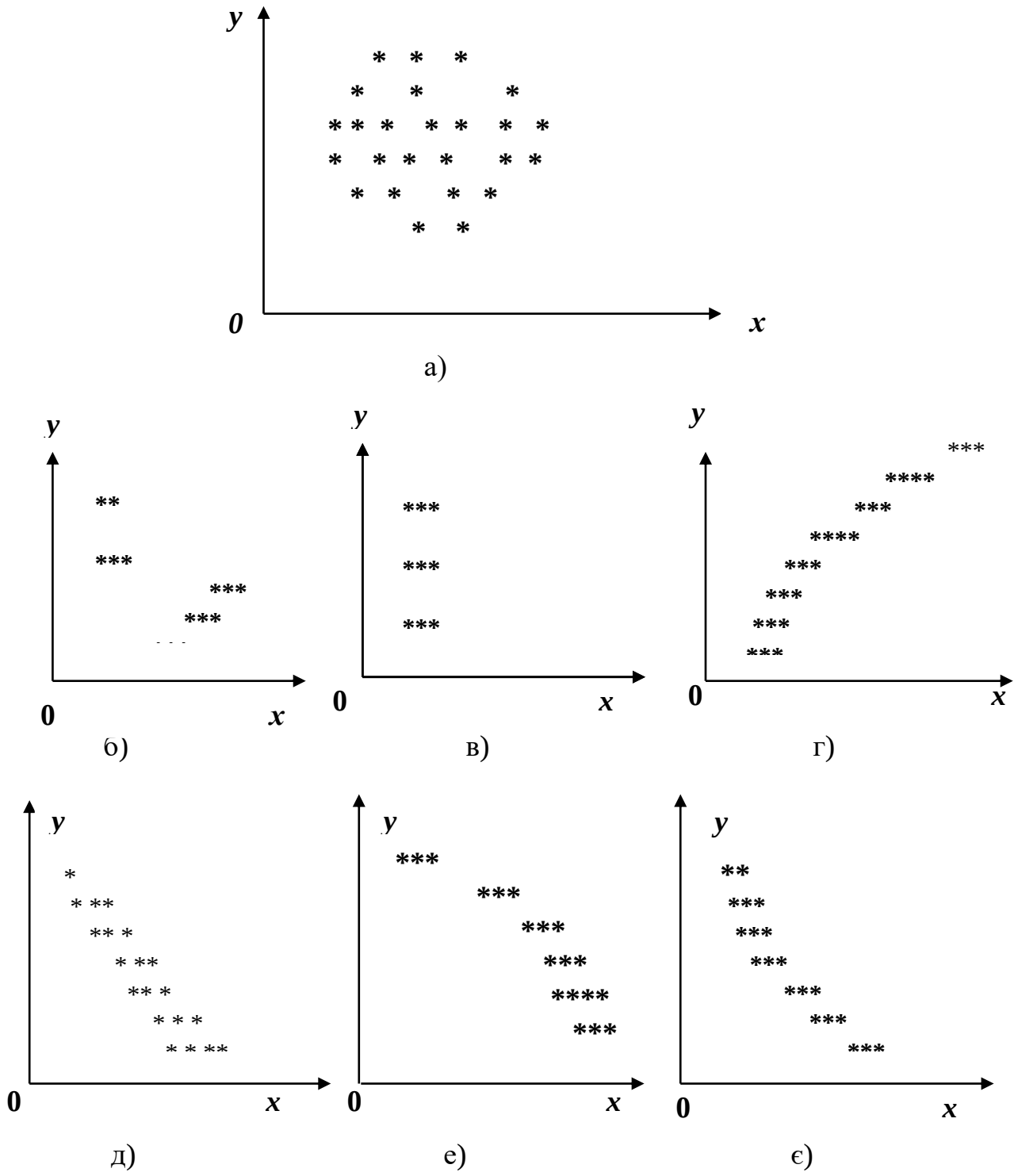
III. Параметризація моделі.

IV. Аналіз та перевірка на адекватність моделі.

V. Прогнозування за моделлю.

I. *Ідентифікація змінних* передбачає з'ясування питання, який показник буде виступати в якості залежної змінної, а який – в якості незалежної. Зокрема, при дослідженні взаємозв'язку між рівнем зайнятості населення і кваліфікацією працівників певної вікової категорії, очевидно вважати, що рівень зайнятості слід розглядати як залежну змінну (позначатимемо через *У*), а кваліфікацію працівників як незалежну змінну (позначатимемо через *Х*).

II. Дослідження опису явища чи процесу, тобто вибір *конкретної* функції *f*, називається *специфікацією моделі*. Зазвичай, специфікацію моделі здійснюють за допомогою *діаграми розсіювання* – графічної форми представлення інформації у прямокутній системі координат. Щоб побудувати діаграму розсіювання необхідно на осі абсцис відзначити значення незалежної змінної (*X*), на осі ординат – значення залежної змінної (*У*). Результат кожного спостереження (x_i, y_i) деякого соціального процесу відображається точкою на площині. Сукупність цих точок утворює хмарку, яка відображає зв'язок між двома змінними (мал. 8.1).



Малюнок 8.1. Основні форми регресій

Отже, розрізняють додатну лінійну та нелінійну і від'ємну лінійну та нелінійну регресії. Наприклад, така ситуація буде мати місце при вивченні залежності обсягу випуску продукції від вартості основних виробничих фондів. Додатна рівноприскорена зростаюча регресія (мал. 8.1 в) існує, наприклад, між прибутковим податком і заробітною платою. Додатна рівносповільнена зростаюча регресія (мал. 8.1 г) може мати місце при встановленні залежності рівня продуктивності праці від стажу роботи.

Від'ємна лінійна регресія (мал. 8.1. д) показує рівномірний спад функції, наприклад, залежність кількості підприємств регіону, що будуть випускати даний вид продукції від ставки податку. На мал. 8.1 (е) та 8.1(є) схематично подано відповідні ситуації взаємозв'язку від'ємної рівноприскореної та рівносповільненої спадної регресії.

Про відсутність зв'язку свідчить діаграма, зображена на мал. 8.1(а).

За виглядом скупчення точок можна висунути гіпотезу про лінійність чи нелінійність взаємозв'язку між змінними. Так, на діаграмі 8.1 б, д маємо явно виражені лінійні тенденції скупчення точок.

2. Третім етапом побудови соціометричної моделі є параметризація моделі. Знаходження значень параметрів $a_0, a_1, ..., a_k$ обраної форми статистичного зв'язку змінних на підставі статистичних даних називається *параметризацією* соціометричної моделі або *оцінюванням параметрів*.

Залежно від методу, з допомогою якого здійснюється оцінювання невідомих параметрів моделі, додатково накладаються певні обмеження як на параметри, так і на випадкову складову.

Особливої уваги заслуговує обсяг вибіркової сукупності. Результати багатьох досліджень підтверджують, що число спостережень повинно у 6-7 разів перевищувати число параметрів моделі. Це означає, що досліджувати модель парної регресії з двома параметрами при наявності менше семи спостережень взагалі не має сенсу. Враховуючи, що соціально-економічні моделі часто будуються за даними рядів динаміки, обмеженими по тривалості (10, 20, 30 років), то при виборі специфікації моделі перевагу слід віддати моделі з меншим числом параметрів.

За виглядом скупчення точок можна висунути гіпотезу про лінійність чи нелінійність взаємозв'язку між змінними. Так, на діаграмі 8.1 б, д маємо явно виражені лінійні тенденції скупчення точок. Спробуємо апроксимувати залежності, зображені на цих діаграмах, лінійною функцією регресії. Звичайно, ці тенденції існують лише в середньому. Вони порушені відхиленням окремих точок. Відхилення від прямої пояснюється впливом інших неврахованих факторів.

Діаграма розсіювання дозволяє провести наочний аналіз емпіричних даних. Якщо геометричне зображення залежності трьох змінних у просторі ще можливе, хоч і утруднене, то при більшому числі змінних це представлення неможливе.

Припустимо, що попереднім результатом специфікації моделі (8.3) є висновок про лінійну залежність між X та Y. Тоді модель (8.3) набере такого вигляду:

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X + U, \tag{8.6}$$

де α_0, α_1 – невідомі (теоретичні) детерміновані параметри, U – невідома випадкова величина (збурення).

<u>Приклади</u>:

1) Y – річний обсяг заощаджень родини, X – річний дохід родини;

2) рівняння Кейнса: Y – індивідуальне споживання, X – наявний прибуток, α_0 – величина автономного споживання, α_1 – гранична схильність до споживання ($0 < \alpha_1 < 1$);

У класичній лінійній моделі парної регресії *незалежна змінна вважається детермінованою величиною*. Ми будемо розглядати класичну лінійну модель

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 x + U. \tag{8.7}$$

Нехай x набирає значення $x_1, x_2, ..., x_n$, де n – обсяг вибірки. Тоді із (8.7) отримується система n рівнянь

$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + U_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{8.8}$$

Повна специфікація моделі (8.7) передбачає виконання певних умов стосовно випадкової складової правої частини (8.8).

Передумова 1. *Математичне сподівання збурень дорівнює нулю:*

$$M(U_i) = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{8.9}$$

Ця передумова означає, що збурення *в середньому* не здійснюють на Y ніякого впливу.

Передумова 2. *Збурення мають однакову дисперсію:*

$$D(U_i) = \sigma_u^2, \quad i = \overline{1,n}, \tag{8.10}$$

де σ_u^2 – *невідоме число*, яке підлягає оцінюванню.

Передумова 3. *Збурення U_i і U_j при $i \neq j$ не корелюють між собою:*

$$\mathrm{cov}(U_i, U_j) = 0 \quad \forall \; i, j = \overline{1,n}, \quad i \neq j. \tag{8.11}$$

Передумова 4. *Випадкові збурення U_i, $i = \overline{1,n}$, розподілені за нормальним законом.*

Згідно із передумовами 1, 2: $U_i \sim N(0, \sigma_u)$, $i = \overline{1,n}$. Наслідком передумов 1-4 є нормальність розподілу випадкових величин Y_i:

$$Y_i \sim N(\alpha_0 + \alpha_1 x_i, \sigma_u), \quad i = \overline{1,n}. \tag{8.12}$$

Зауваження. *Передумови 1-4 стосовно моделі (8.8) разом визначають* ***класичну нормальну лінійну модель регресії***. *Якщо ж передумова 4 не виконується, то має місце* ***класична лінійна модель***.

Перший крок на шляху дослідження моделі (8.7) полягає у параметризації цієї моделі, тобто, щоб за *конкретною* вибіркою обсягом *n* знайти такі значення оцінок невідомих параметрів α_0, α_1, для яких побудована пряма регресії була б найкращою в певному сенсі серед усіх інших прямих.

Припустимо, що за виглядом діаграми розсіювання ми встановили лінійний характер залежності усереднених значень результативної змінної. Нехай a_0 та a_1 – оцінки невідомих параметрів α_0 та α_1 відповідно. Тоді оцінкою моделі (8.8) по вибірці є *n* рівнянь

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + u_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{8.13}$$

або

$$y_i = \hat{y}_i + u_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{8.14}$$

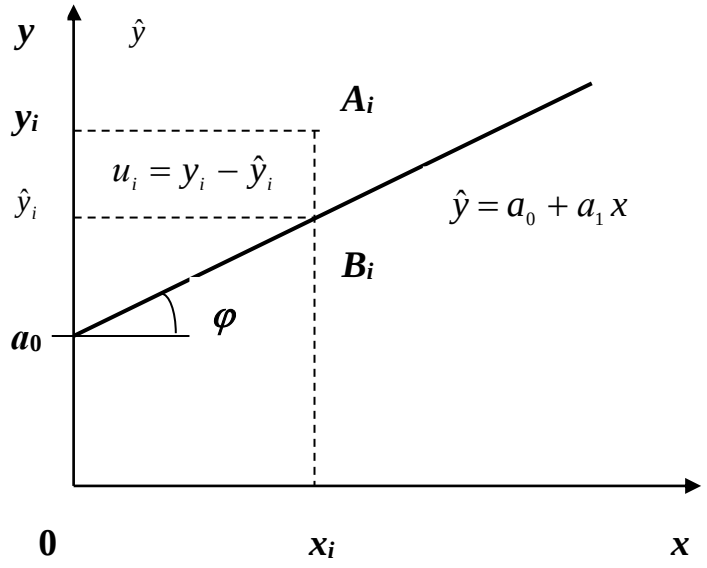
де $\hat{y}_i$ – *групова середня*, або *умовна середня*, знайдена за рівнянням регресії

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x, \tag{8.15}$$

тобто $\hat{y}_i = a_0 + a_1 x_i$,

u_i – *вибіркова оцінка збурення* U_i або *залишок регресії*, або ж *відхилення*.

Знак “^” над *y* означає оцінку залежної змінної, отриману з рівняння (8.15) при деяких усереднених умовах. Отже, під простою регресією розуміється одностороння стохастична залежність результативної змінної від однієї пояснюючої змінної.



Малюнок 8.2. Регресійна пряма та її параметри

Постійна величина a_0 визначає точку перетину прямої регресії з віссю ор-

динат (мал. 8.2). З точки зору інтерпретації соціальної системи, то a_0 – початковий стан системи.

Коефіцієнт a_1 характеризує нахил прямої до осі абсцис. Позначимо через φ кут, який пряма утворює з віссю абсцис. Тоді $a_1 = tg\ \varphi$. Коефіцієнт регресії a_1 є мірою залежності змінної y від x або мірою впливу, виявленою зміною x на y. Відповідно до рівняння (8.15) a_1 визначає середню величину зміни результативного показника при зміні пояснювальної змінної x на одну одиницю. Знак a_1 визначає напрямок цієї зміни, а розмірність цього коефіцієнта є відношенням розмірності залежної змінної до розмірності пояснюючої змінної.

Після визначення числових оцінок параметрів можна за рівнянням (8.15) обрахувати значення $\hat{y}_i$ для кожного значення пояснюючої змінної x_i. Це значення називають *розрахунковим*.

При лінійній функції сукупність розрахункових значень утворює пряму регресії. Як відзначалося раніше, через випадковий вплив сторонніх факторів для кожного значення x_i може спостерігатися декілька емпіричних значень y_i, тобто кожному значенню x відповідає розподіл значень змінної y. Значення функції регресії $\hat{y}_i$ таким чином є оцінками середніх значень змінної y для кожного фіксованого значення змінної x. Отже, значення регресії $\hat{y}_i$ показують середнє значення залежної змінної y при заданому x_i пояснюючої змінної у припущенні, що єдиною причиною зміни y є змінна x, а випадкова збурена змінна u прийняла значення, рівне нулеві. Розкид спостережених значень змінної y довкола $\hat{y}_i$ зумовлений впливом множини неврахованих факторів. Різницею між емпіричним значенням y_i і розрахунковим $\hat{y}_i$ назвемо залишком, який дає числову оцінку значенням збуреної змінної U (мал. 8.2). Отже, числове значення u_i визначається як $y_i - \hat{y}_i = u_i,\ i = \overline{1,n}$. Зрозуміло, що чим менше значення u_i тим більш вдаліше вибрана пряма.

Таким чином, ми підійшли до проблеми оцінювання невідомих параметрів a_0 та a_1 шляхом відповідних процедур, одна з яких має назву – метод найменших квадратів.

Метод найменших квадратів

Провівши аналіз певного процесу з врахуванням характеру хмарки точок на діаграмі розсіювання, переходимо до вирівнювання дослідних даних, яке полягає у побудові гіпотетичної лінії. Основною вимогою при цьому є зведення до мінімуму помилок специфікації форм зв'язку між змінними. Ці помилки визначаються через відхилення емпіричних даних y_i від значень регресії $\hat{y}_i$, тобто вони формують значення збуреної змінної U.

$$y_i - \hat{y}_i = u_i,\ i = \overline{1,n} \qquad (8.16)$$

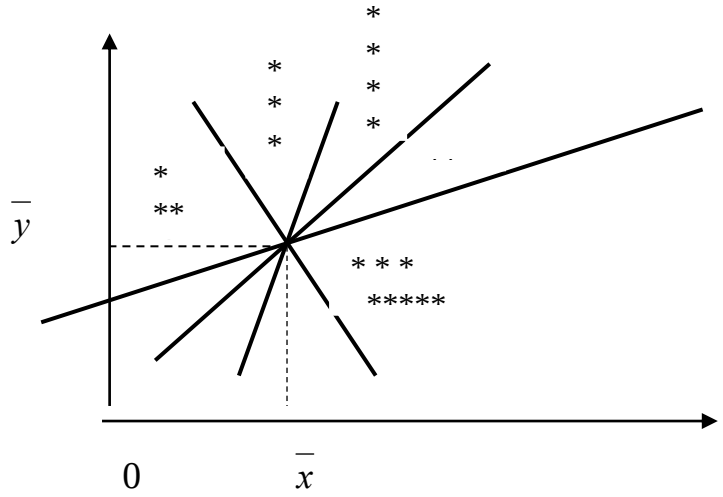
З графіка (мал. 8.2) бачимо, що u_i – відхилення дослідної точки від оціночної прямої, виміряне по вертикалі. Це відхилення може бути додатнім чи від'ємним в залежності від того, по яку сторону від лінії розміщена конкретна точка.

При виборі прямої можна висунути вимогу, щоб сума відхилень всіх то-

чок від лінії регресії була рівна нулеві, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i) = 0, \ i = \overline{1,n}. \qquad (8.17)$$

Умова (8.17) означає, що сума додатніх відхилень повинна бути рівною сумі від'ємних. Дотримання даної умови не дає можливості однозначно визначити розміщення вирівнюючої прямої на площині. Дану умову задовільняє нескінчена множина прямих (мал. 8.3), тобто ми маємо пучок прямих, які проходять через задану точку з координатами (x_i y_i).



Малюнок 8.3. Пучок регресійних прямих

Для знаходження однозначного розв'язку використовуємо один із показників розсіювання випадкової величини – дисперсію. Якщо всі відхилення піднести до квадрату і просумувати, то результат буде безпосередньо залежати від розкиду точок довкола шуканої лінії. Із множини можливих прямих має бути вибрана точка, для якої міра розсіювання дослідних точок ($\overline{x_i}, \overline{y_i}$) буде мінімальною.

У відповідності до проведених міркувань обчислимо вибіркову дисперсію, що характеризує міру розсіювання дослідних значень ($\overline{x_i}, \overline{y_i}$) довкола значень регресії, тобто дисперсію залишків u_i (залишкову дисперсію):

$$S_u^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2, \ i = \overline{1,n}. \qquad (8.18)$$

Вираз у знаменнику вказує на *число ступенів вільності k*. Визначається воно за формулою: $k=n-m-1$, де n – обсяг вибірки; m – число параметрів регресії

Оскільки для простої лінійної регресії існує тільки одна пояснююча змінна ($m=1$), то число ступенів вільності буде: $k=n-1-1=n-2$. Врахування числа ступенів вільності дає можливість отримати *незміщену оцінку* дисперсії.

Корінь квадратний із виразу (8.18) являє собою стандартну помилку оцінки регресії.

Вимогу про те, що міра розсіювання дослідних точок від гіпотетичної лінії повинна бути мінімальною, можна представити наступним чином:

$$F(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \to \min, \ \ i = \overline{1, n} \tag{8.19}$$

тобто сума квадратів відхилень емпіричних значень змінної y від значень, обчислених за рівнянням прямої, повинна бути мінімальною.

Метод, в основу якого покладена вимога мінімізації суми квадратів відхилень, називається *методом найменших квадратів* (МНК). З його допомогою знаходять такі оцінки параметрів рівняння регресії, які зводять до мінімуму вибрану міру розсіювання. При цьому проходить вирівнювання емпіричних значень в одну лінію регресії. У випадку лінійного зв'язку між змінними ця лінія є прямою (пряма регресія).

Таким чином, проблема визначення прямої регресії зводиться до мінімізації функції (8.19). Необхідною умовою цього є перетворення в нуль перших частинних похідних цієї функції по кожній змінній a_0 та a_1. Оскільки

$$F(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} u_1^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 ,$$

то

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i = 0 \end{cases}$$

Результатом виконання відповідних перетворень є наступна система нормальних рівнянь відносно невідомих a_0 та a_1:

$$\begin{cases} n a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) a_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i , \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) a_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i . \end{cases} \tag{8.20}$$

Поділимо кожне із рівнянь на n:

$$\begin{cases} a_0 + \overline{x} a_1 = \overline{y}, \\ \overline{x} a_0 + \overline{x^2} a_1 = \overline{xy}, \end{cases} \tag{8.21}$$

де $\overline{x} = \sum x_i / n$, $\overline{y} = \sum y_i / n$, $\overline{xy} = \sum x_i y_i / n$, $\overline{x^2} = \sum x_i^2 / n$.

Використавши формулу Крамера, остаточно отримаємо єдиний розв'язок системи (8.21):

$$a_1 = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}, \quad a_0 = \overline{y} - a_1 \overline{x}. \tag{8.22}$$

Оскільки оцінки (8.22) знайдені з допомогою МНК, то їх називають *МНК-оцінками*.

Для здійснення аналізу побудованої моделі (8.13), яка є оцінкою теоретичної моделі (8.8), потрібно знайти незміщені оцінки дисперсій для a_0 та a_1 відповідно:

$$\sigma_{a_1}^2 = \frac{\sigma_u^2}{n\sigma_x^2}; \tag{8.23}$$

$$\sigma_{a_0}^2 = \frac{\sigma_u^2 \overline{x^2}}{n\sigma_x^2}. \tag{8.24}$$

Кожна з цих дисперсій містить невідомий співмножник σ_u^2. Незміщеною точковою оцінкою σ_u^2 є так звана *виправлена дисперсія*, яка обчислюється за формулою (8.18).

Вище були знайдені точкові МНК-оцінки невідомих параметрів регресії α_0, α_1, а також їх числові характеристики. На перший погляд, наступний крок мав би полягати у побудові інтервальних оцінок для цих параметрів. Проте в полі зору необхідно тримати правомірність самої специфікації вихідної моделі (8.7), тобто теоретично можливі такі варіанти:

1) $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_1 \neq 0$; 2) $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$; 3) $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_1 = 0$; 4) $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$.

При цьому безпосередньо на підставі вибірки неможливо діагностувати кожний із цих варіантів, оскільки вибірка організовується випадковим чином. У той же час немає сенсу будувати довірчі інтервали для α_1 у випадках 3 та 4, а для α_0 – у випадках 2 та 4.

Відмітимо важливість діагностування рівності $\alpha_1 = 0$. У цьому випадку взагалі слід переглянути висунуту модель. Разом з тим, якщо $\alpha_0 = 0$ (при $\alpha_1 \neq 0$), то це, як буде встановлено нижче, необхідно враховувати при розгляді питання про якість моделі.

Отже, актуальним є питання про з'ясування *значущості* коефіцієнтів регресії α_0 і α_1 на підставі наявних статистичних даних.

Висунемо статистичну нульову гіпотезу H_0: $\alpha_m = 0$, де $m = 0{,}1$. Альтернативна гіпотеза H_1: $\alpha_m \neq 0$. Задамо також рівень значущості ε.

МНК-оцінки a_m є незміщеними і лінійними відносно випадкових величин $Y_1, Y_2, ..., Y_n$, які розподілені нормально ($Y_i \sim N(\alpha_0 + \alpha_1 x_i, \sigma_u)$, $i = \overline{1,n}$). Тому і a_m мають нормальний розподіл: $a_m \sim N(\alpha_m, \sigma_{a_m}^2)$, $i = 0{,}1$,

де $\sigma_{a_m}^2$ визначаються формулами (8.23), (8.24). Незміщеною оцінкою σ_u^2 є S_u^2 (формула (8.18)). Тому із врахуванням (8.18), (8.19) незміщені оцінки $\sigma_{a_m}^2$ (вони невідомі, бо невідомим є σ_u^2!) визначаються формулами

$$S_{a_0}^2 = \frac{S_u^2 \overline{x^2}}{n\sigma_x^2}, \quad S_{a_1}^2 = \frac{S_u^2}{n\sigma_x^2}. \tag{8.25}$$

Розглянемо випадкову величину

$$t_m = \frac{a_m - \alpha_m}{\sigma_{a_m}} \cdot \frac{\sigma_u}{S_u}. \tag{8.26}$$

Вона має t-розподіл із $k = n - 2$ ступенями вільності і вже *не залежить від* σ_u.

Враховуючи (8.23), (8.24) та (8.25), із (8.26) отримаємо такі t-розподіли:

$$t_0 = \frac{a_0 - \alpha_0}{S_{a_0}}, \quad t_1 = \frac{a_1 - \alpha_1}{S_{a_1}}. \tag{8.27}$$

Зміст основної гіпотези $H_0(\alpha_m = 0)$ та альтернативної $H_1(\alpha_m \neq 0)$ дозволяє сформулювати *двосторонній критерій значущості оцінок* a_0 та a_1:

якщо виконується нерівність

$$\left| \frac{a_m}{S_{a_m}} \right| > t_{кр.}, \tag{8.28}$$

де $t_{кр} = t_{двостр.кр}(\varepsilon, n-2)$, $\varepsilon = 1 - \gamma$, *– критична точка розподілу Ст'юдента, тоді на рівні значущості ε приймається гіпотеза* H_1*, тобто вважається, що* $\alpha_m \neq 0$.

Нехай МНК-оцінки a_0 та a_1 є значущими, тобто виконуються нерівності (8.28). Побудуємо довірчі інтервали для невідомих параметрів α_0 та α_1, використавши випадкові величини (8.27), які розподілені за законом Ст'юдента із $k = n - 2$ ступенями вільності.

Позначимо $t_0(\gamma, k)$, $t_1(\gamma, k)$ корені рівнянь

$$P(|t_0| < t_{кр}) = \gamma, \quad P(|t_1| < t_{кр}) = \gamma$$

відповідно, які знаходяться за таблицею розподілу Ст'юдента. Тоді із надійністю γ виконуються нерівності

$$\left| \frac{a_0 - \alpha_0}{S_{a_0}} \right| < t_{кр}, \quad \left| \frac{a_1 - \alpha_1}{S_{a_1}} \right| < t_{кр}$$

звідки отримуються довірчі інтервали

$$a_0 - t_{кр} S_{a_0} < \alpha_0 < a_0 + t_{кр} S_{a_0} \tag{8.29}$$

$$a_1 - t_{кр} S_{a_1} < \alpha_1 < a_1 + t_{кр} S_{a_1}, \tag{8.30}$$

де $S_{a_0} = \sqrt{S_{a_0}^2}$, $S_{a_1} = \sqrt{S_{a_1}^2}$, а $S_{a_0}^2$ та $S_{a_1}^2$ визначаються формулами (8.25).

Основна мета дослідження моделі (8.7) – це статистично надійний точковий чи інтервальний прогноз значень залежної змінної Y або її математичного сподівання. Для досягнення цієї мети необхідно з'ясувати *якість моделі* або *значущість моделі*, тобто встановити, чи відповідає модель експериментальним даним і чи достатньо включених в рівняння незалежних (пояснюючих) змінних (однієї або кількох) для описання залежної змінної. Перевірка значущості рівняння регресії проводиться на основі дисперсійного аналізу, який у даному випадку використовується як допоміжний засіб для вивчення якості регресійної моделі.

Розглянемо питання про *декомпозицію дисперсій*. Дисперсія спостережених значень залежної змінної має такий вигляд:

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2 / n.$$

Відхилення $y_i - \overline{y}$ запишемо таким чином:

$$y_i - \overline{y} = (\hat{y}_i - \overline{y}) + (y_i - \hat{y}_i). \qquad (8.31)$$

У статистиці різницю $y_i - \overline{y}$ називають *загальним відхиленням*, $\hat{y}_i - \overline{y}$ – *відхиленням, яке можна пояснити моделлю*, $y_i - \hat{y}_i$ – *непояснюваним відхиленням* (яке не можна пояснити моделлю).

Піднесемо обидві частини (8.31) до квадрату та підсумуємо за індексом i:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \overline{y})^2 + 2\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \overline{y})(y_i - \hat{y}_i) + \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

Якщо в моделі (8.7) $\alpha_0 \neq 0$, тоді другий доданок в правій частині дорівнює нулю, тому остаточно отримаємо рівність

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \overline{y})^2 + \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \qquad (8.32)$$

або

$$СКЗ = СКП + СКН,$$

де $СКЗ$ – загальна сума квадратів, $СКП$ – пояснена сума квадратів, $СКН$ – непояснена сума квадратів.

Поділивши (8.32) на n, отримаємо:

$$\sigma_{заг.}^2 = \sigma_{регр.}^2 + \sigma_{пом.}^2, \qquad (8.33)$$

де $\sigma^2_{заг.}$ – загальна дисперсія, $\sigma^2_{регр.}$ – дисперсія, що пояснює регресію, $\sigma^2_{пом.}$ – дисперсія помилок.

Для одержання *незміщених* оцінок дисперсій, які фігурують в рівності (8.33), потрібно знайти відповідні ступені вільності.

Для обчислення $СКЗ$ використовуються n чисел $\{(y_1-\bar{y}),(y_2-\bar{y}),...,(y_n-\bar{y})\}$, серед яких лінійно незалежними є $n-1$, оскільки $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})=0$. Тому ступінь вільності $СКЗ$ дорівнює $n-1$.

Із врахуванням (8.22) рівняння регресії можна записати у такому вигляді:

$$\hat{y}_i-\bar{y}=a_1(x_i-\bar{x}),$$

звідки $СКП=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=a_1^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$.

Отже, $СКП$ утворюється з використанням однієї одиниці незалежної інформації – a_1, тому ступінь вільності її дорівнює 1 або $m-1$, де m – число параметрів моделі ($m=2$).

Нарешті, $СКН=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y})_2$ має $n-2$ ступенів вільності.

Число, яке отримується діленням суми квадратів на відповідний ступінь вільності, називається *середнім квадратом*.

Середні квадрати

$$S_R^2=\overline{СКП}=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2/1,\quad S_U^2=\overline{СКН}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2/(n-2) \qquad (8.34)$$

є *незміщеними оцінками* дисперсій залежної змінної, обумовлених відповідно регресією (пояснюючою змінною) і дією неврахованих факторів та помилок.

Повернемося до рівності (8.33). Якщо обидві її частини розділити на $\sigma^2_{заг.}$ то отримаємо

$$1=\frac{\sigma^2_{регр.}}{\sigma^2_{заг.}}+\frac{\sigma^2_{пом.}}{\sigma^2_{заг.}}. \qquad (8.35)$$

Перший доданок в правій частині (8.35) називається *коефіцієнтом детермінації* і позначається R^2 (або d):

$$R^2=\frac{\sigma^2_{регр.}}{\sigma^2_{заг.}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{n\sigma_y^2}. \qquad (8.36)$$

Із рівності (8.35) отримаємо рівносильну формулу для означення коефіцієнта детермінації:

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma^2_{пом.}}{\sigma^2_{заг.}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n\sigma_y^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{n\sigma_y^2}. \qquad (8.36^*)$$

R^2 є однією із *найбільш ефективних оцінок адекватності регресійної моделі, мірою її якості або характеристикою прогностичної сили моделі.*

Величина R^2 показує, яка частина (частка) варіації залежної змінної обумовлена варіацією пояснюючої змінної.

Оскільки доданки в рівності (8.35) невід'ємні, то з врахуванням (8.36) отримується подвійна нерівність $0 \le R^2 \le 1$.

Чим ближче значення R^2 до одиниці, тим краще модель апроксимує емпіричні дані, тим ближче спостереження знаходяться по відношенню до прямої регресії. Якщо $R^2 = 1$, то всі емпіричні точки (x_i, y_i) лежать на прямій регресії і між змінними Y та x існує лінійна функціональна залежність. Якщо ж $R^2 = 0$, то варіація залежної змінної повністю обумовлена дією неврахованих у моделі змінних і пряма регресії паралельна осі абсцис.

<u>Зауваження</u>. *Коефіцієнт детермінації R^2 є сенс розглядати тільки у випадку наявності вільного члена в моделі (8.7), тобто $\alpha_0 \ne 0$, оскільки тільки у цьому випадку, як це вище відзначалося, виконується рівність (8.32), а, отже, і співвідношення (8.36*).*

Зміст R^2 нагадує зміст вибіркового коефіцієнта кореляції r. Це обумовлено рівністю

$$R^2 = r^2. \qquad (8.37)$$

$$R^2 = \frac{\sigma^2_{регр.}}{\sigma^2_{заг.}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{n\sigma_y^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_1^2 (x_i - \bar{x})^2}{n\sigma_y^2} = \frac{a_1^2 \sigma_x^2}{n\sigma_y^2} =$$

$$= \left(\frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\sigma_x^2}\right)^2 \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} == \left(\frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}\right)^2 = r^2.$$

Числові характеристики R^2 та r є точковими статистичними оцінками відповідних невідомих чисел. У зв'язку із цим навіть у випадку $\alpha_0 \ne 0$ R^2 та $|r|$ можуть бути відмінними від нуля. А тому виникає необхідність перевірити значущість R^2 та r, отриманих для конкретної вибірки.

Якщо $\alpha_0 \ne 0$, тобто відсутня лінійна залежність між залежною і пояснюючою змінними, тоді випадкові величини $S_R^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 / 1$,

$S_U^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2/(n-2)$ мають χ^2-розподіли відповідно із 1 та $n-2$ ступенями вільності, а їх відношення – розподіл Фішера з тими ж ступенями вільності. Тому рівняння регресії значуще на рівні значущості ε, якщо виконується нерівність

$$F = \frac{СКП \cdot (n-2)}{СКН \cdot 1} = \frac{S_R^2}{S_U^2} > F_{кр}(\varepsilon, k_1, k_2), \qquad (8.38)$$

де $F_{кр}(\varepsilon, k_1, k_2)$ – табличне значення F-критерія Фішера-Снедокора, визначене на рівні значущості ε при $k_1 = 1$ і $k_2 = n-2$ ступенях вільності.

Проте виявляється, що *F –тест (8.38) рівносильний t-тесту Ст'юдента при перевірці значущості параметра* α_1 (у випадку парної лінійної моделі).

В ряді задач потрібно оцінити *значущість коефіцієнта кореляції* r. На рівні значущості ε він вважається значущим (тобто відкидається гіпотеза H_0: $r_{ген} = 0$), якщо виконується нерівність

$$|t_{емп}| = \frac{|r|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} > t_{кр} \quad t_{кр}(\varepsilon, n-2).$$

Однак неважко показати, що отримувані значення t-критерію при перевірці гіпотез $\alpha_1 = 0$ та $r_{ген} = 0$ однакові.

Отже, *якщо на рівні $\varepsilon = 1-\gamma$ зроблено висновок про значущість α_1, то на тому ж рівні вважається значущим і генеральний (теоретичний) коефіцієнт кореляції $r_{ген}$ і навпаки.*

Наведемо інші прості показники якості лінійної регресії, які використовуються як додаткова інформація при виборі найкращої моделі з можливих.

*Абсолютна середня відсоткова помилка MAPE (*mean absolute percentage error):

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\hat{y}_i - y_i}{y_i}\right| \cdot 100\%. \qquad (8.39)$$

Цей показник використовується при порівнянні точності прогнозів різнорідних об'єктів, бо характеризує відносну точність прогнозу. При цьому вважається, що значення MAPE, менше 10%, дає високу точність прогнозу, а, отже, і якість моделі; від 10% до 20% – добру точність; від 20% до 50% – задовільну точність; понад 50% – незадовільну точність.

Середня відсоткова помилка MPE (mean percentage error):

$$MPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\hat{y}_i - y_i}{y_i} \cdot 100\%. \qquad (8.40)$$

Це показник незміщеності прогнозу. З точки зору практики для якісних моделей цей показник повинен бути «малим», тобто не перевищувати 5%.

<u>Зауваження</u>. *Показники (8.39) та (8.40) – невизначені, якщо серед* $y_1, y_2, ..., y_n$ *є нульове значення.*

3. Соціальні явища та процеси визначаються великим числом діючих чинників. Це зумовлює необхідність дослідження залежності однієї результуючої змінної y від пояснюючих (незалежних) змінних $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Така задача розв'язується з допомогою *множинного регресійного аналізу*.

Об'єктом вивчення цієї теми є така модель множинної лінійної регресії:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m + u, \tag{8.41}$$

де y та u – випадкові величини (u – збурення або залишок), $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ – невідомі детерміновані параметри.

Нехай $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im}$ $(i = \overline{1,n})$ – спостережні значення пояснюючих змінних. Тоді модель (8.41) набере такого виду:

$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_{i1} + \alpha_2 x_{i2} + \ldots + \alpha_m x_{im} + U_i, \qquad i = \overline{1,n} \tag{8.42}$$

Систему n рівнянь (8.42) запишемо у векторно-матричному вигляді:

$$Y_M = X\alpha + U, \tag{8.42*}$$

де

$$Y_M = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nm} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}.$$

Оцінкою цієї моделі по вибірці $\{y_i, x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im}\}$ обсягом n є векторно-матричне рівняння

$$Y = Xa + E, \tag{8.43}$$

де $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$, $a = (a_0, a_1, \ldots, a_m)'$, $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)'$, штрих означає операцію транспонування матриці.

Покладемо, що стосовно моделі (8.42*) виконуються такі припущення.

Передумова 1. U – випадковий вектор, змінні $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – детерміновані величини, а тому X – детермінована матриця.

Передумова 2. $M(U) = \mathbf{0}_n = (0,0,\ldots,0)'$.

Передумова 3. $\sum_U = M(UU') = \sigma^2 I_n$, де I_n – одинична матриця порядку n, σ – стала.

Передумова 4. U – нормально розподілений випадковий вектор, тобто $U \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n)$.

Передумова 5. Ранг матриці X дорівнює $m + 1 < n$.

Модель (8.42*), яка задовольняє передумовам 1-5, називається *класичною нормальною лінійною моделлю множинної регресії*; якщо ж не виконується тільки передумова 4, то модель називається *класичною лінійною моделлю множинної регресії*.

Детерміновану складову моделі (8.43) позначимо $\hat{Y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n)'$, тобто.

$$\hat{Y} = Xa, \tag{8.44}$$

Тоді критерієм вибору вектора оцінок a згідно з методом найменших квадратів є мінімізація суми квадратів залишків:

$$Q(a) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = E'E = (Y - Xa)'(Y - Xa) \to \min. \tag{8.45}$$

Оскільки для будь-яких матриць A та B узгодженої вимірності $(A \cdot B)' = B' \cdot A'$, то після розкриття дужок в (8.45) отримаємо

$$Q(a) = Y'Y - a'X'Y - Y'Xa + a'X'Xa.$$

Добуток $Y'Xa$ є скалярною величиною, тому він не змінюється від транспонування:

$$Y'Xa = (Y'Xa)' = a'X'Y.$$

З врахуванням цього умова (8.45) набуде такого вигляду:

$$Q(a) = Y'Y - 2a'X'Y + a'X'Xa \to \min. \tag{8.46}$$

Згідно з необхідною умовою екстремуму функції $Q(a)$ $m+1$ змінних $a_0, a_1, ..., a_m$ потрібно прирівняти до нуля всі частинні похідні першого порядку від $Q(a)$ по цих змінних або у матричній формі – вектор частинних похідних:

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = \left(\frac{\partial Q}{\partial a_0}, \frac{\partial Q}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial Q}{\partial a_m} \right).$$

У результаті отримаємо таку систему нормальних рівнянь у матричній формі для визначення вектора a:

$$X'Xa = X'Y. \tag{8.47}$$

Згідно з передумовою 5 $(m+1) \times (m+1)$ – матриця $X'X$ є невиродженою, тому розв'язком рівняння (8.47) є вектор

$$a = (X'X)^{-1} X'Y, \tag{8.48}$$

де $(X'X)^{-1}$ – обернена матриця до матриці $X'X$.

Якщо вектор a знайдено, тоді *вибіркове рівняння множинної регресії* можна зобразити у такому вигляді:

$$\hat{y} = X_0'a = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m, \tag{8.49}$$

де $\hat{y}$ – групова (умовна) середня змінної y при заданому векторі значень пояснюючих змінних

$$X_0' = (1, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0}) = (1, x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Дисперсії оцінок параметрів визначають точність рівняння множинної регресії. Для їх вимірювання розглядають так звану *коваріаційну матрицю вектора оцінок параметрів* $\sum_a$, яка є матричним аналогом дисперсії однієї випадкової величини:

$$\sum_a = \begin{pmatrix} \sigma_{00} & \sigma_{01} & \dots & \sigma_{0m} \\ \sigma_{10} & \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{m0} & \sigma_{m1} & \dots & \sigma_{mm} \end{pmatrix},$$

де елементи σ_{ij} – коваріації оцінок параметрів a_i та a_j: $\sigma_{ij} = \mathrm{cov}(a_i, a_j)$, $i, j = \overline{0, m}$, $\sigma_{it} = D(a_i)$, $t = \overline{0, n}$.

Матрицю $\sum_a$ знаходимо за формулою

$$\sum_a = \sigma^2 (X'X)^{-1}. \tag{8.50}$$

Висновок: з допомогою матриці $(X'X)^{-1}$ визначається не тільки сам вектор a оцінок параметрів (8.48), але і дисперсії, і коваріації його компонент.

Із (8.50), зокрема отримуємо: $D(a_i) = \sigma^2 [(X'X)^{-1}]_{ii}$, $i = \overline{0, m}$, – відповідні діагональні елементи матриці Σ_a.

Параметр σ^2, який фігурує у передумовах 3, 4, а також у рівності (8.50) – *невідомий*. Як і у випадку парної регресії його необхідно оцінити. Незміщеною оцінкою параметра σ^2 або *вибірковою залишковою дисперсією* є S_e^2:

$$S_e^2 = \frac{E'E}{n-m-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-m-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-m-1} \tag{8.51}$$

Число $n-m-1$ називається *числом ступенів вільності*.

З'ясуємо значущість коефіцієнтів регресії a_i ($i = \overline{0, m}$) і побудуємо довірчі інтервали для параметрів моделі α_i при умові їх значущості.

Згідно (8.50) і (8.51) незміщена оцінка $S_{a_i}^2$ дисперсії $\sigma_{a_i}^2$ коефіцієнта регресії a_i визначається за формулою

$$S_{a_i}^2 = S_e^2 [(X'X)^{-1}]_{ii}, \; i = \overline{0, m},$$

де S_e^2 – незміщена оцінка параметра σ^2, $[(X'X)^{-1}]_{ii}$ – i-й діагональний елемент матриці $(X'X)^{-1}$.

Середнє квадратичне відхилення або *стандартна помилка* коефіцієнта регресії a_i знаходиться за формулою

$$S_{a_i} = S_e \sqrt{[(X'X)^{-1}]_{ii}}, \; i = \overline{0, m}. \tag{8.52}$$

Оскільки випадкова величина $(a_i - \alpha_i)/S_{a_i}$ для нефіксованої вибірки розподілена за законом Ст'юдента із $k = n - m - 1$ ступенями вільності, то a_i значуще відрізняється від нуля (гіпотеза $H_0 : a_i = 0$ відхиляється) на рівні значущості ε, якщо

$$\left|t_{спост.}\right| = \frac{\left|a_i\right|}{S_{a_i}} > t_{кр.}, \tag{8.53}$$

де $t_{кр.} = t_{двост.кр.}(\varepsilon, n - m - 1)$ – табличне значення t – критерію Ст'юдента, визначене на рівні значущості ε при числі ступенів вільності $k = n - m - 1$.

Якщо використовується нерівність (8.53), тоді є сенс будувати довірчий інтервал для параметра α_i, який визначається подвійною нерівністю

$$a_i - t_{кр.} S_{a_i} < \alpha_i < a_i + t_{кр.} S_{a_i}. \tag{8.54}$$

4. Припущення відносно лінійної залежності між соціальними показниками x та y деякого явища або процесу може не завжди підтверджуватися даними $\{(x_i, y_i)\}$ значень цих показників. І це зрозуміло, бо в ряді випадків залежність між показниками є суттєво нелінійною. У такому випадку між досліджуваними соціальними явищами об'єктивно існують нелінійні співвідношення, які можуть бути описаними з допомогою кривих зростання.

Вибір функції зростання здійснюється з врахуванням теоретичних положень, пов'язаних з досліджуваними соціальними процесами та можливостями програмних продуктів, наприклад, ППП EXCEL. Дана програмний пакет дозволяє вибрати із спеціального меню необхідну регресійну модель.

Розрізняють два класи нелінійних регресій. До першого класу відносять регресії, нелінійні відносно аналізованих пояснюючих змінних, але лінійних відносно невідомих, що підлягають оцінці параметрів регресії. Ось чому, нелінійні регресії що утворюють цей клас також називають квазілінійними регресіями. Їх перевага в тому, що для них можливе безпосереднє застосування методу найменших квадратів, і як наслідок: залишаються в силі всі початкові передумови лінійного регресійного аналізу та властивості МНК – оцінок параметрів регресії (незміщеність, обгрунтованість, гомоскедастичність і т.д.). Використовуються ті самі критерії значущості, аналогічно будуються довірчі інтервали. Одностороння залежність між явищами може бути описаною, наприклад, параболічною залежністю вигляду:

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \tag{8.55}$$

або поліноміальною

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m \tag{8.56}$$

Функції регресії (8. 55) і (8.56) лінійні відносно параметрів і нелінійні відносно пояснюючих змінних. Отже, маємо справу з функціями квазалінійної ре-

гресії. У загальному випадку квазілінійна регресія має такий вид запису:

$$\hat{y} = a_0 + a_1 F_1(x) + ... + a_m F_m(x), \qquad (8.57)$$

де $F_1(x),...,F_m(x)$ – нелінійні функції відносно пояснюючих змінних.

До квазілінійних регресій безпосередньо можна застосувати метод найменших квадратів, якщо представити їх у вигляді лінійних множинних регресій. Наприклад, (8.56) зводиться до множинної регресії з допомогою заміни:

$$a_0 = a_0^*, a_1 = a_1^*, ..., x = x_1, x^2 = x_2, ..., x^m = x_m.$$

У результаті такої заміни отримуємо:

$$\hat{y} = a_0^* + a_1^* x_1 + ... + a_m^* x_m, \qquad (8.58)$$

що повністю відповідає лінійному виду.

Другий клас регресій характеризується нелінійністю відносно оцінюваних параметрів. Нелінійні регресії першого та другого класу також називають відповідно суттєво лінійними і суттєво нелінійними регресіями. Другий клас регресій часто зустрічається при дослідженні соціальних процесів. Проте йому властивий значний недолік – неможливість прямо застосувати метод найменших квадратів.

В якості прикладу регресій другого класу, а саме регресій нелінійних відносно оцінюваних параметрів можна привести такі функції: степенева - $\hat{y} = a \cdot x^b$; показникова - $\hat{y} = ab^x$; логістична - $\hat{y} = \frac{a}{1+be^{-cx}}$ або $\hat{y} = \frac{a}{1+e^{b-cx}}$ і т.д.

Для оцінки параметрів у даному випадку використовують ітераційні методи або застосовують апроксимацію. Широко використовується лінійне перетворення функції регресії, що дає можливість застосувати до перетворюваних параметрів статистичні критерії лінійної регресії.

Наприклад, зробимо такі перетворення для степеневої функції. Прологарифмуємо праву та ліву частину функції $\hat{y} = a \cdot x^b$, отримаємо $\ln\hat{y} = \ln a + \ln\hat{x}$. Ввівши заміну: $z = \ln\hat{y}, a^* = \ln a, x^* = \ln x$, отримаємо $z = a^* + bx^*$. Аналогічні перетворення виконаємо і для логістичної функції:

$$\ln\left(\frac{a}{\hat{y}} - 1\right) = \ln b - cx \text{ або } \ln\left(\frac{a}{\hat{y}} - 1\right) = b - cx.$$

Розглянемо найважливіші нелінійні соціометричні моделі.

Гіперболічна (зворотна) залежність має вид

$$\hat{y} = a_0 + \frac{a_1}{x}.$$

Вона зводиться до лінійної заміною $z = \frac{1}{x}$. Одержимо

$$\hat{y} = a_0 + a_1 z.$$

Перевірка моделі на адекватність та побудова прогнозу здійснюється як і для лінійної моделі з урахуванням розглянутої заміни змінної x.

Степенева (мультиплікативна) залежність має наступний вид

$$\hat{y} = a_0 \cdot x^{a_1}, \ \ a_0 > 0, \ x > 0.$$

Вона зводиться до лінійної моделі логарифмуванням за довільною основою, наприклад, e. Тоді отримаємо співвідношення

$$\ln \hat{y} = \ln a_0 + a_1 \ln x.$$

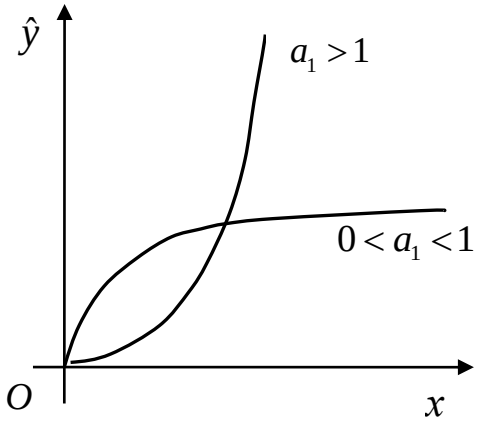
Застосуємо такі заміни:

$$\ln \hat{y} = \hat{y}^*, \ \ \ln a_0 = a_0^*, \ \ \ln x = x^*.$$

Отримаємо рівняння

$$\hat{y}^* = a_0^* + a_1 x^*.$$

Графік степеневої залежності зображено на малюнку 8.4. Вона використовується для моделювання ситуацій, в яких ріст витрат x деякого ресурсу обумовлює необмежене збільшення випуску Y.



Малюнок 8.4. Графік степеневої залежності

Експоненційна (показникова) модель записується так:

$$\hat{y} = a_0 \cdot a_1^x, \ \ a_0 > 0, \ a_1 > 0, \ a_1 \neq 1.$$

Для одержання лінійної залежності застосуємо логарифмування. Тоді

$$\ln \hat{y} = \ln a_0 + x \ln a_1.$$

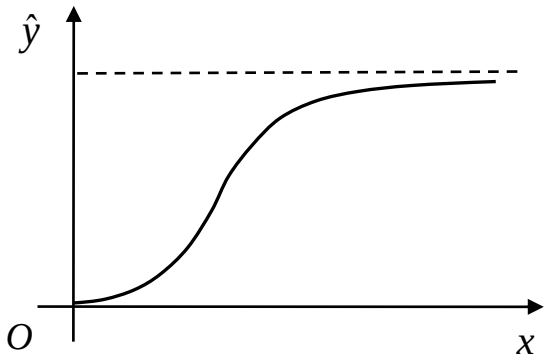
Здійснивши заміну змінних $\ln \hat{y} = \hat{y}^*$, $\ln a_0 = a_0^*$, $\ln a_1 = a_1^*$, отримаємо

$$\hat{y}^* = a_0^* + a_1^* x.$$

Криві з границею росту і точкою перегину часто використовуються для статистичного аналізу попиту на деякі нові товари. Зручною і простою тут є *крива Джонсона:*

$$\hat{y} = e^{a_0 - \frac{a_1}{x}}, \quad a_0 > 0, \; a_1 > 0.$$

Її графік зображено на малюнку 8.5.



Малюнок 8.5. Графік кривої Джонсона

Знайдемо логарифми обох частин кривої Джонсона:

$$\ln \hat{y} = a_0 - \frac{a_1}{x}.$$

Замінивши $\ln \hat{y} = \hat{y}^*$, $\frac{1}{x} = z$, одержимо лінійну залежність

$$\hat{y}^* = a_0 - a_1 x.$$

Для опису процесів в демографії, маркетингу застосовують *криву Гомперця*

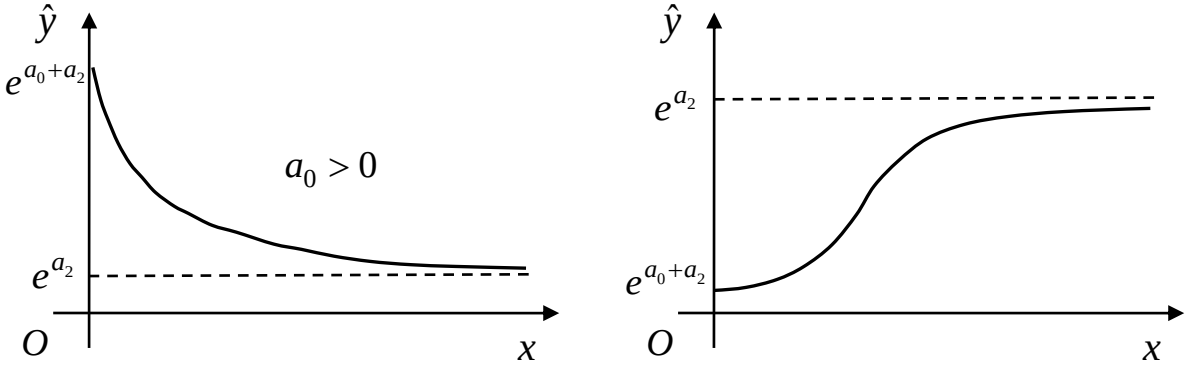
$$\hat{y} = e^{a_0 \cdot a_1^x + a_2}, \; 0 < a_1 < 1.$$

Логарифмуванням ця крива зводиться до модифікованої експоненційної моделі

$$\hat{y}^* = a_0 \cdot a_1^x + a_2,$$

де $\hat{y}^* = \ln \hat{y}$.

Графік цієї залежності наведено на малюнку 8.6.

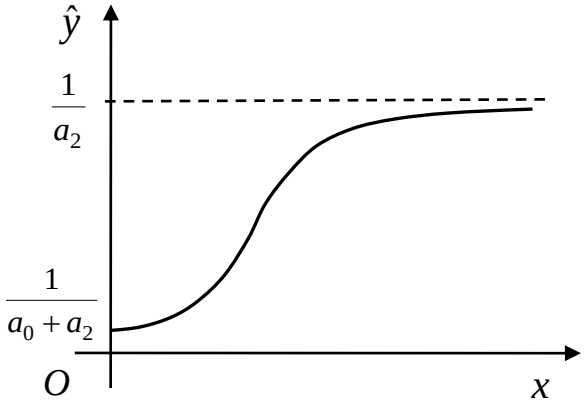


Малюнок 8.6. Графік модифікованої експоненти.

Зворотною до модифікованої експоненти є *логістична крива*

$$\hat{y} = \frac{1}{a_0 \cdot a_1^x + a_2}, \; 0 < a_1 < 1, \; a_0 > 0, \; a_2 > 0.$$

Її графік зображено на малюнку 8.7.



Малюнок 8.7. Графік логістичної кривої.

ТЕМА 9

Коефіцієнти зв'язку

1. ***Коефіцієнти взаємної спряженості.***
2. ***Коефіцієнти кореляції.***
3. ***Коефіцієнти рангової кореляції***.

1. При побудові соціально-математичної моделі необхідно оцінити тісноту зв'язку між досліджуваними показниками. З'ясування ступеня інтенсивності цих зв'язків дає ключ до розуміння природи досліджуваного явища, сутності його властивостей, їх взаємовпливу і взаємозумовленості.

Процес пізнання складного явища полягає в тому, що його по можливості розкладають на окремі компоненти, кожний з яких вивчають окремо і у взаємозв'язку, що дає інтегровану картину розглядуваного явища.

У загальному випадку існують два види залежностей між властивостями: функціональні та статистичні.

За функціональної залежності одній властивості однозначно відповідає одне або кілька значень іншої.

За статистичної залежності певному значенню однієї властивості відповідає множина значень іншої властивості у вигляді статистичного розподілу. В окремому випадку статистичну залежність, при якій зміна однієї властивості тягне за собою зміну середніх арифметичних значень умовних розподілів дру-

гої властивості, називають кореляційною залежністю.

Існує два способи визначення густоти статистичного зв'язку між змінними величинами: за допомогою *коефіцієнта взаємної спряженості*, в основі якого лежить показник спряження χ^2 між розподілами двох властивостей, і *коефіцієнта кореляції*, в основі якого лежить так званий змішаний момент $\sum a_{ij} b_{ij}$, де a_{ij}, b_{ij} величини деякого розсіювання властивостей x і y елементів досліджуваної сукупності.

Згідно з першим способом вимірюють спряження умовних розподілів як випадкових величин, так і випадкових подій. Тому для розрахунку коефіцієнта взаємної спряженості не потрібне числове калібрування шкал і поряд з числовими шкалами екстенсивних й інтенсивних величин можна використовувати також номінальну шкалу, наприклад, розподілу індивідів за спеціальностями. На противагу цьому розрахунок коефіцієнта кореляції ґрунтується на вимірюванні розсіяння саме числових значень x_i і y_j на шкалах випадкових величин X і Y біля середніх значень x і y, і щоб виконати цей розрахунок, потрібні числові шкали пропорційна ординальна або у крайньому разі рангова ординальна. Коефіцієнт парної кореляції r пропорційний коефіцієнту регресії ρ у лінійному рівнянні регресії (8.7) і його значення свідчить про близькість залежності властивостей x і y до функціональної і, отже, про ступінь інтенсивності їх зв'язку. Слаба кореляція властивостей, тобто слаба чутливість однієї властивості до змін іншої через її недостатню реакцію (тільки в середньому), зумовлює малу величину коефіцієнта регресії і, отже, слабку керованість однієї властивості шляхом зміни іншої. Отже, природа коефіцієнтів спряженості та кореляції різна, тому їх числові значення можуть істотно різнитись. Обидва ці коефіцієнти породжують сім'ї споріднених коефіцієнтів, які визначаються залежно від типів шкал і способів вимірювання властивостей.

В основі коефіцієнтів взаємної спряженості двох властивостей лежить така сама ідея, що й в основі критерію погодження χ^2, тільки призначення критерію погодження полягає у визначенні ступеня збіжності (погодження) емпіричного й теоретичного розподілів ВВ X, а призначення коефіцієнта взаємної спряженості полягає у визначенні ступеня збіжності (спряженості) емпіричних умовних розподілів ВВ (X |Y) при різних значеннях y_j з безумовним розподілом ВВ X.

Пояснимо суть статистичної залежності на прикладі зв'язку між властивостями x і y, що відповідають питанням соціологічної анкети Скільки задач зі спецкурсу Ви розв'язали? і Чи застосовували Ви одержані за спеціальністю знання під час виробничої практики? Потрібно встановити, чи є звязок між набутими студентами знаннями за спеціальністю і потребами виробництва щодо застосування цих знань на практиці. Припустимо, що в результаті соціологічного опитування 200 студентів-практикантів одержано двомірний розподіл ВВ (X,Y), поданий у вигляді табл. 9.1 (підсумковий стовпчик $n_{\square j}$ і рядок $n_{i\square}$відображають одномірні розподіли ВВ X та $У$.

Таблиця 9.1

y \ x	1	4	7	10	$n_{\square j}$
0	20	40	20	0	80
1	30	0	60	30	120
$n_{i\square}$	50	40	80	30	200

Зауважимо, що перше запитання виражає екстенсивну величину кількості розв'язаних задач, яка визначається на прокаліброваній інтервальній шкалі через кожні три одиниці: 0–2; 3–5; 6–8; 9–11. Якщо вимірювана величина потрапляє в певний інтервал, то значення x_i є центром i-го інтервалу в точках відповідно 1; 4; 7; 10. За другим запитанням з дихотомічною шкалою з варіантами відповідей Так (1) і Ні (0) за результатами опитування студенти розподілились на дві групи щодо використання фахових знань під час виробничої практики. Кожній групі відповідають умовні розподіли відносних частот студентів $w(x|y_j)$ щодо кількості розв'язаних задач із спецкурсу (табл. 9.2).

Таблиця 9.2

w	y \ x	1	4	7	10	$\sum$
$w(x\|y_0)$	0	0,25	0,5	0,25	0	1
$w(x\|y_1)$	1	0,25	0	0,5	0,25	1
$w(x)$		0,25	0,2	0,4	0,15	1

Умовні розподіли $w(x|y_0)$ і $w(x|y_1)$ для розглядуваних двох груп різняться, причому в першій групі менш успішні студенти, у другій більш успішні. Отже, наявна залежність між успішністю студентів (кількістю розв'язаних задач) і їх здатністю використовувати здобуті знання у виробничій практиці ($\chi^2 > 0$). Щоб визначити величину цієї залежності, обчислюємо χ^2, причому як емпіричний розподіл вибираємо j-й умовний розподіл відносних частот $w(x|y_j)$, а як теоретичний, з яким порівнюється емпіричний розподіл, безумовний розподіл $w(x)$:

$$\chi_j^2 = \sum \frac{(w_{ij} - w_{i.})^2}{w_{i.}} \tag{9.1}$$

Підсумовуємо кожне χ_j^2 зі статистичною вагою, що дорівнює абсолютній частоті в розподілі ВВ Y (див. табл. 9.1):

$$\chi^2 = \sum_l n_{\square j}\chi_j^2 = \sum_l n_{\square j} \sum_v \frac{(w_{ij} - w_{i.})^2}{w_{i.}} \tag{9.2}$$

де l, v – кількість інтервалів на шкалах властивостей x і y.

На основі даних табл. 9.1 і 9.2 обчислюємо значення χ^2:

$$\chi^2 = 80 \cdot \left[\frac{(0,25-0,25)^2}{0,25} + \frac{(0,5-0,2)^2}{0,2} + \frac{(0,25-0,4)^2}{0,4} + \frac{(0-0,15)^2}{0,5} \right] +$$

$$+120 \cdot \left[\frac{(0,25-0,25)^2}{0,25} + \frac{(0-0,2)^2}{0,2} + \frac{(0,5-0,4)^2}{0,4} + \frac{(0,25-0,15)^2}{0,5} \right] = 87$$

Як бачимо з формули (9.2), що більший опитуваний масив, тобто що більше значення $n_{\square j}$, $(j = 1,...,l)$, то більше значення χ^2, а це означає, що χ^2 залежить від n і не є нормованою величиною тісноти зв'язку. Коефіцієнт зв'язку між властивостями не повинен залежати від кількості опитуваних осіб і має перебувати в межах від нуля до одиниці. У соціологічних дослідженнях використовують два коефіцієнти взаємної спряженості, що задовольняють ці вимоги: коефіцієнт Пірсона

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}} \tag{9.3}$$

і коефіцієнт Чупрова

$$K = \sqrt{\frac{\chi^2}{n(v-1)(l-1)}} \tag{9.4}$$

де $(v-1)(l-1) = k$ – число ступенів свободи.

Мінімальне значення кожного з цих коефіцієнтів дорівнює нулю, якщо $\chi^2 = 0$, тобто коли умовні розподіли ВВ ($X|Y$) для кожного y_j однакові, що виражає факт незалежності ВВ X від ВВ Y. Максимальне значення кожного з цих коефіцієнтів дорівнює одиниці. Цей результат буде тоді, коли чисельник підкорінного дробу дорівнює знаменнику, тобто якщо значення χ^2 істотно перевищує n або якщо повністю неузгоджені кожний з умовних розподілів $w(x|y_j)$ з безумовним розподілом $w(x)$, що означає істотну залежність умовних розподілів ВВ ($X|Y$) від значень y_j ВВ Y.

Хоча коефіцієнти Пірсона і Чупрова відображають одне й те саме явище, вони не рівні у загальному випадку. Рівність їх ($C=K$), а отже, рівність правих частин у формулах (9.3) і (9.4) спостерігається тільки за умови, що $n(k-1) = \chi^2$, тобто коли χ^2 перевищує кількість опитаних осіб n в число ступенів свободи k без одиниці, що практично не буває. Якщо ж n значно перевищує χ^2, то останнім у знаменнику виразом (9.3) можна знехтувати, і після скорочення дробу дістаємо співвідношення, згідно з яким коефіцієнт Пірсона перевищує коефіцієнт Чупрова в квадратний корінь з числа ступенів свободи:

$$\frac{C}{K} = \sqrt{v} \qquad (9.5)$$

Обчислимо значення коефіцієнтів взаємної спряженості властивості x щодо кількості розв'язаних задач, яка визначає успішність студентів, і властивості y щодо використання здобутих знань під час виробничої практики, підставивши обчислене значення χ^2 у формули (9.3) і (9.4):

$$C = \sqrt{\frac{87}{200+87}} = 0,55$$

$$K = \sqrt{\frac{87}{200(4-1)(2-1)}} = 0,38$$

Одержані результати надто приблизно задовольняють співвідношення (9.5):

$$\left[\frac{C}{K} = \frac{0,55}{0,38} = 1,45\right] = \left[\sqrt{v} = \sqrt{(4-1)(2-1)} = 1,73\right]$$

Перевіримо статистичну гіпотезу про зв'язок між цими властивостями. Як основну висуваємо гіпотезу про те, що коефіцієнти C і K дорівнюють нулю, за альтернативної гіпотези, що вони не дорівнюють нулю. Задамося рівнем значущості ε=0,05. Скориставшись таблицею розподілу Пірсона, визначимо критичне значення $\chi^2_{кр}$ для числа ступенів свободи $k = (v-1)(l-1)$=(4−1)(2−1)=3:

$\chi^2_{кр}$ (0,05; 3)=7,8.

Емпіричне значення статистичної характеристики обчислено за формулою (7.2): $\chi^2_{емп} = 87$. Із нерівності

$$(\chi^2_{емп} = 87) > (\chi^2_{кр} = 7,8)$$

випливає, що $\chi^2_{емп}$ потрапило у критичну область. Отже, розбіжність частот умовних розподілів $w(x|\, y_j)$ з безумовним розподілом $w(x)$ (табл. 9.2) значуща, і основну гіпотезу про незалежність властивостей x і y відхиляємо, а приймаємо альтернативну гіпотезу про те, що зв'язок між цими властивостями з надійністю $\gamma = 0,95$ існує.

Формулу для обчислення коефіцієнта взаємної спряженості Чупрова використовують також для визначення зв'язку між двома дихотомічними властивостями. Спільний розподіл двох дихотомічних властивостей x і y наведено в табл. 9.3.

Таблиця 9.3

y \ x	“Ні”	“Так”	$\sum$
“Ні”	a	b	$a+b$
“Так”	c	d	$c+d$
$\sum$	$a+c$	$b+d$	n

У табл. 9.3 літерами *a, b, c, d* позначено абсолютні частоти двомірного розподілу, а їх суми по рядках і стовпцях означають абсолютні частоти одномірних розподілів сукупності за властивостями *x* і *y*. Якщо в цих позначеннях виразити значення χ^2 і підставити його у формулу коефіцієнта Чупрова (9.4), то з урахуванням того, що для $v = l = 2$ число ступенів свободи $k = (v-1)(l-1) = (2-1)(2-1) = 1$ одержимо вираз для визначення коефіцієнта взаємної спряженості двох дихотомічних властивостей, який називається *коефіцієнтом асоціації*:

$$A = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}} = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}} \qquad (9.6)$$

Зазначимо, що знаменник береться за абсолютною величиною і знак коефіцієнта асоціації *A* визначається знаком чисельника.

Обчислимо коефіцієнт асоціації двох властивостей, одна з яких, а саме *x*, відповідає дихотомічному запитанню анкети Чи застосовували Ви одержані за спеціальністю знання під час виробничої практики?, а друга, а саме у, відповідає дихотомічному запитанню Чи

визначились Ви з місцем роботи? Абсолютні частоти за цими запитаннями подані в табл. 9.4.

Таблиця 9.4

y \ x	“Ні”	“Так”	$\sum$
“Ні”	36	4	40
“Так”	64	96	160
$\sum$	100	100	200

Підставляючи відповідні значення абсолютних частот у формулу (9.6), дістанемо

$$A = \frac{36 \cdot 96 - 4 \cdot 64}{\sqrt{(36+4)(64+96)(36+64)(4+96)}} = 0,4.$$

Залежність між властивостями x і y істотна. Цей факт випливає з того, що перший і другий рядки табл. 9.4 мають протилежні умовні розподіли (табл.9.5).

Таблиця 9.5

w	y \ x	"Ні"	"Так"	$\sum$
$w(x\|y_0)$	"Ні"	0,9	0,1	1
$w(x\|y_1)$	"Так"	0,4	0,6	1
$w(x)$		0,5	0,5	1

Отже, величина коефіцієнта асоціації A=0,4 свідчить про наявність позитивного зв'язку між показниками x і y: в більшості випускники вузу, які застосували знання під час виробничої практики, визначились і з місцем роботи.

Перевіримо статистичну гіпотезу про наявність зв'язку між властивостями x і y. Як основну висуваємо гіпотезу, що A=0, а як альтернативну $A \neq 0$. Задамося рівнем значущості ε= 0,05. З таблиці знаходимо критичне значення $\chi^2_{кр}$ з урахуванням числа ступенів свободи k=1:

$\chi^2_{кр}$ (0,05; 1)=3,8.

Згідно з формулою (9.2) і даними табл. 9.4 і 9.5

$$\chi^2 = 40 \cdot \left[\frac{(0,9-0,5)^2}{0,5} + \frac{(0,1-0,5)^2}{0,5} \right] + 160 \cdot \left[\frac{(0,4-0,5)^2}{0,5} + \frac{(0,6-0,5)^2}{0,5} \right] = 32 .$$

Із нерівності

$$(\chi^2_{емп} = 32) > (\chi^2_{кр} = 3,8)$$

випливає, що $\chi^2_{емп}$ потрапило у критичну область і, отже, основну гіпотезу про відсутність зв'язку між властивостями застосування студентами-випускниками здобутих знань у виробничій практиці і вирішенням питання про працевлаштування A= 0 відхиляємо і приймаємо альтернативну гіпотезу про існування такого зв'язку $A \neq 0$. У випадку неправильності цього рішення нами допущено з імовірністю 0,05 помилку I роду.

2. Розглянемо коефіцієнти зв'язку, що ґрунтуються на використанні змішаного моменту між властивостями x і y:

$$K = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ij} \qquad (9.7)$$

При визначенні різновидів коефіцієнтів кореляції змінні a_{ij} і b_{ij} у виразі змішаного моменту мають різну смислову інтерпретацію. Зауважимо, що змішаний момент K чутливий до величини зв'язку між двома властивостями, але

не може бути використаний як нормований показник зв'язку, оскільки момент залежить від масштабу складових a_{ij} і b_{ij}. Нормований вираз K змінюється від 0 до 1 за абсолютною величиною і називається *узагальненим коефіцієнтом кореляції*:

$$R = \frac{K}{\sigma_a \sigma_b} = \frac{\sum a_{ij} b_{ij}}{\sqrt{a_{ij}^2}\sqrt{b_{ij}^2}} \tag{9.8}$$

де a_{ij} і b_{ij} – розсіювання відповідних властивостей, $\sigma_a^2 = \frac{1}{n}\sum a_{ij}^2$, $\sigma_b^2 = \frac{1}{n}\sum b_{ij}^2$ – їх дисперсії.

У соціологічних дослідженнях використовуються три різновиди коефіцієнтів кореляції: коефіцієнт кореляції Пірсона r і два коефіцієнти рангової кореляції Кендела τ і Спірмена ρ. Усі вони обчислюються за формулою узагальненого коефіцієнта кореляції R (9.8), але для кожного з них змінні a_{ij} і b_{ij} мають різне змістове навантаження.

Коефіцієнт кореляції r визначає величину зв'язку між двома властивостями x і y, які мають рівномірну шкалу вимірювання. Такими властивостями є питання анкети Скільки задач з спецкурсу Ви розв'язали? і Як Ви оцінюєте свій рівень знань? Нехай

$$a_{ij} = x_j - x_i, \quad b_{ij} = y_j - y_i,$$

де x_i, x_j, y_i, y_j – відповіді студентів на відповідні запитання, виміряних на шкалах x і y та виражені в числах. Підставивши вирази для a_{ij} і b_{ij} у формулу (9.8), після відповідних перетворень одержимо формулу для розрахунку коефіцієнта кореляції

$$r = \frac{K}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{1}{n}\sum \frac{(x_k - \bar{x})\cdot(y_k - \bar{y})}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \tag{9.9}$$

де $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum n_{ij} x_i y_j$; $\bar{x}, \bar{y}$ – середні арифметичні; σ_x, σ_y – СКВ (середньоквадратичні відхилення).

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum n_i x_i, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum n_j y_j, \qquad \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}, \qquad \sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2},$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2, \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum (y_j - \bar{y})^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2$$

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}} \tag{9.9*}$$

Визначимо тісноту зв'язку між властивостями x і y. Частоти розподілу

двомірної ВВ (X,Y) подані в табл. 9.6. Обчислимо середні, дисперсії і середньоквадратичні відхилення(подані в табл. 9.6) та коефіцієнт кореляції, що характеризують функцію розподілу двомірної ВВ (X,Y): $f(x,\overline{x},\sigma_x^2, y,\overline{y},\sigma_y^2,r)$

y \ x	1	4	7	10	$n_{\square j}$
1	5	5	0	0	10
2	25	15	10	0	50
3	20	10	40	10	80
4	0	10	20	10	40
5	0	0	10	10	20
$n_{i\square}$	50	40	80	30	200

$$\overline{x} = \frac{1}{200}(50\cdot 1 + 40\cdot 4 + 80\cdot 7 + 30\cdot 10) = 5{,}35;$$

$$\overline{y} = \frac{1}{200}(10\cdot 1 + 50\cdot 2 + 80\cdot 3 + 40\cdot 4 + 20\cdot 5) = 3{,}05$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{200}[(1-5{,}35)^2\cdot 50 + (4-5{,}35)^2\cdot 40 + (7-5{,}35)^2\cdot 80 + (10-5{,}35)^2\cdot 30] = 9{,}4$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{200}[(1-3{,}05)^2\cdot 10 + (2-3{,}05)^2\cdot 50 + (3-3{,}05)^2\cdot 80 + (4-3{,}05)^2\cdot 40 +$$

$$+(5-3{,}05)^2\cdot 20] = 1;$$

$$\sigma_x = \sqrt{9{,}4} = 3{,}1; \quad \sigma_y = \sqrt{1} = 1;$$

$$r = \frac{1}{3{,}1\cdot 1}\{\frac{1}{200}[(5\cdot 1 + 5\cdot 4 + 0\cdot 7 + 0\cdot 10)\cdot 1 + (25\cdot 1 + 15\cdot 4 + 10\cdot 7 + 0\cdot 10)\cdot 2 +$$

$$+(20\cdot 1 + 10\cdot 4 + 40\cdot 7 + 10\cdot 10)\cdot 3 + (0\cdot 1 + 10\cdot 4 + 20\cdot 7 + 10\cdot 10)\cdot 4 +$$

$$+(0\cdot 1 + 0\cdot 4 + 10\cdot 7 + 10\cdot 10)\cdot 5] - 3{,}05\cdot 5{,}35\} = 0{,}7.$$

Перевіримо статистичну гіпотезу про існування кореляційного зв'язку між властивостями x і y, тобто між числом розв'язаних студентами задач зі спецкурсу і рівнем знань. Як основну висуваємо гіпотезу, що такий зв'язок не має місця, тобто $r = 0$, а як альтернативну – що такий зв'язок є, причому додатний, тобто $r>0$.

Задамося рівнем значущості $\varepsilon = 0{,}05$ і визначимо правосторонню критичну область для статистичної характеристики t за таблицею розподілу Стьюдента, враховуючи, що числа ступенів свободи у цьому випадку дорівнює $k = n - 2 = vl - 2 = 4\cdot 5 - 2 = 18$, де v, l – кількість інтервалів на шкалах x і y:

$$t_{кр}=(0,05;\ 18)= 2,1.$$

Обчислимо емпіричне значення статистичної характеристики $t_{емп}$:

$$t_{åì\ ï} = \frac{r\sqrt{vl-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0,7\cdot\sqrt{4\cdot 5-2}}{\sqrt{1-0,7^2}} = 4,2$$

Із нерівності

$$(t_{емп}= 4,2) > (t_{кр} = 2,1)$$

випливає, що $t_{емп}$ потрапило у критичну область, внаслідок чого основну гіпотезу про відсутність зв'язку між властивостями x і y відхиляємо і приймаємо альтернативну гіпотезу про те, що кореляційний зв'язок між цими властивостями існує.

3. *Коефіцієнти рангової кореляції* вимірюють тісноту зв'язку між властивостями, наявність яких у кожного елемента сукупності неможливо виміряти точно, але можна розставити елементи за зростанням чи зниженням ступеня інтенсивності кожної властивості або, іншими словами, можна здійснити ранжування ряду. Наприклад, зріст людей у групі можна виміряти в сантиметрах, у результаті чого виходить ряд розподілу людей за зростом, а можна вишикувати людей за зростом (без вимірювання їх зросту) або ранжувати ряд, приписавши кожному місцю порядковий номер, і при оцінюванні тісноти зв'язку оперувати цим числом. Ранжований у такий спосіб ряд елементів за однією характеристикою можна ранжувати й за іншою характеристикою, наприклад, за вагою. Природно, що розстановка людей за вагою у загальному випадку не збігатиметься з їх розстановкою за зростом. Однак якщо невідповідність розстановки людей у цих рядах невелика, тобто існує тенденція одночасного збільшення зросту і ваги, то це означає, що між цими властивостями існує зв'язок, і що яскравіше ця тенденція в ранжованих рядах виражена, то більша між ними тіснота зв'язку.

Припустимо, треба виміряти тісноту зв'язку між двома властивостями, які за змістом відповідають запитанням соціологічної анкети (успішність студентів як кількість розв'язаних задач зі спецкурсу і рівень знань як їх самооцінка в балах). Скажімо, сім опитаних студентів (позначимо їх першими сімома літерами алфавіту) ранжовані за ступенями успішності щодо розв'язання задач і за самооцінками їх рівня знань (з I по VII місце) (у подальшому при виконанні арифметичних операцій ординальні числа як інтенсивні величини 0-го порядку зручніше виражати відношеннями відповідних кардинальних чисел до одиниці, опускаючи останню в запису) (табл. 9.7).

Таблиця 9.7

Студент	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж
Запитання про успішність	5	7	2	1	4	3	6
Запитання про рівень знань	7	6	3	2	2	4	5

При розташуванні елементів першого ряду у вигляді натурального ряду чисел чіткіше виявляється картина відповідності елементів першого і другого рядів (табл. 9.8).

Таблиця 9.8

Студент	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж
Запитання про успішність	1	2	3	4	5	6	7
Запитання про рівень знань	1	3	4	2	7	5	6

З порівняння рядів випливає, що існує певний зв'язок між цими властивостями, оскільки виявляється тенденція до скупчення менших значень рангів на початку і великих значень рангів наприкінці другого ряду. Отже, порядок розташування рангів другого ряду відносно рангів першого ряду, записаного у вигляді натурального ряду чисел, визначає ступінь їх взаємозалежності. Ступінь безладу у другому ряду визначається кількістю пар елементів, розташованих у зворотному порядку (інверсій), таких як А і Ж (7 і 5), А і Б (7 і 6), оскільки саме така кількість операцій потрібна для зворотної перестановки елементів у парах, щоб перетворити другий ряд на впорядкований.

Кожній парі з прямим порядком елементів присвоїмо значення +1, а із зворотним значення −1. Очевидно, що ступінь невпорядкованості, який характеризує міру кореляції двох властивостей, визначається відношенням різниці числа додатних і числа від'ємних одиниць S до загальної кількості пар рангів, що дорівнює половині кількості комбінацій з n елементів по два: $C_n^2 = n(n-1)/2$. Це відношення називають *коефіцієнтом рангової кореляції Кендела* і визначають так:

$$\tau = \frac{2S}{n(n-1)} = \frac{S}{C_n^2} \tag{9.10}$$

Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена обчислюють за формулою

$$\rho = 1 - \frac{12V}{n^3 - n} \tag{9.11}$$

де V – сумарна невпорядкованість другого ряду відносно першого (складові V відображають статистичну вагу кожної невпорядкованої пари рангів).

Здійснимо порівняльний аналіз коефіцієнтів рангової кореляції Кендела τ і Спірмена ρ Для цього переберемо всі можливі пари рангів і присвоїмо їм додатні та від'ємні одиниці згідно з вимогами коефіцієнта Кендела, а також обчислимо статистичні ваги пар з інверсією рангів згідно з вимогами коефіцієнта Спірмена. Загальна кількість пар рангів $C_7^2 = 7 \cdot (7-1)/2 = 21$ (табл. 9.9).

Таблиця 9.9

Пара рангів	Порядок рангів для τ	Статистична вага інверсій для ρ	Пара рангів	Порядок рангів для τ	Статистична - вага інверсій для ρ	Пара рангів	Порядок рангів для τ	Статистична вага інверсій для ρ
АБ	7 6 –1	1	БГ	+1		ВЖ	+1	
АВ	+1		БД	+1		ГД	+1	
АГ	+1		БЕ	+1		ГЕ	+1	
АД	+1		БЖ	+1		ГЖ	+1	
АЕ	+1		ВГ	+1		ДЕ	4 2 –1	2
АЖ	7 5 –1	2	ВД	3 2 –1	1	ДЖ	+1	
БВ	+1		ВЕ	+1		ЕЖ	+1	

Обчислимо значення S для коефіцієнта Кендела. Кількість додатних одиниць P=17, а кількість від'ємних одиниць Q= − 4. Отже, $S=P–Q$ =17–4=13. Розрахуємо коефіцієнт рангової кореляції Кендела:

$$\tau = \frac{S}{C_7^2} = \frac{13}{21} = 0,62.$$

Значення τ змінюється від +1, якщо всі пари рангів мають прямий порядок, до −1, якщо всі пари мають зворотний порядок рангів; τ=0, якщо кількість пар з прямим і зворотним порядками рангів однакова: $P=Q$, у результаті чого чисельник $S=P–Q$ обертається на нуль.

На практиці для обчислення коефіцієнта τ використовують простіші способи, що не потребують складання таблиці, кількість пар рангів у якій істотно збільшується зі збільшенням кількості опитуваних осіб n. Виходячи зі співвідношення $S=P–Q$, перетворимо формулу для обчислення коефіцієнта τ так, щоб вона містила або кількість пар рангів з прямим порядком P, або зі зворотним порядком Q:

$$\tau = \frac{P-Q}{\frac{1}{2}n(n-1)} = \frac{2P}{\frac{1}{2}n(n-1)} - 1 = 1 - \frac{2Q}{\frac{1}{2}n(n-1)} \qquad (9.12)$$

Звернемося до розглянутого прикладу в табл. 9.9, де проранжовано порівнювані ряди і, крім того, верхній ряд подано у вигляді натурального ряду чисел. Для визначення τ потрібно перерахувати у другому ряді кількість пар рангів P (або Q). Так, у другому рядку, що містить сім елементів з першим елементом "1", прямий порядок утворюють останні шість елементів, з другим елементом "3" прямий порядок утворюють чотири наступних елементи (усі, що стоять праворуч, крім "2"), з кожним наступним елементом прямий порядок утворю-

ють відповідно 3, 3, 0 і 1 елементи. Отже,

$$P=6+4+3+3+0+1=17$$

і обчислюємо

$$\tau=\frac{2\cdot 17}{\frac{1}{2}\cdot 7\cdot(7-1)}-1=\frac{4\cdot 7}{7\cdot 6}-1=0,62$$

Визначимо тепер коефіцієнт рангової кореляції Спірмена за формулою (9.11). Із табл. 9.9 випливає, що

$$V=1+2+1+2=6.$$

Знаючи V і n, визначаємо

$$\rho=1-\frac{12\cdot 6}{7^3-7}=0,78$$

На практиці для обчислення ρ використовують іншу формулу

$$\rho=1-\frac{6\sum d_i^2}{n^3-n} \qquad (9.13)$$

яку отримують у результаті підстановки $V=\frac{1}{2}\sum d_i^2$, де $d_i^2=g_i-h_i$ – різниця між рангами g_i та h_i i-го елемента в першому і другому рядку (табл. 9.10).

Таблиця 9.10

Студент	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	$\sum$
Запитання про успішність	1	2	3	4	5	6	7	
Запитання про рівень знань	1	3	4	2	7	5	6	
d_i	0	–1	–1	2	–2	1	1	
d_i^2	0	1	1	4	4	1	1	12

Визначаємо

$$\rho=1-\frac{6\cdot 12}{7^3-7}=0,78.$$

Отже, коефіцієнт рангової кореляції Спірмена ρ=0,78 перевищує коефіцієнт рангової кореляції Кендела τ=0,62. Загалом значення цих коефіцієнтів достатньо великі, що свідчить про істотний зв’язок між успішністю студентів за кількістю розв’язаних задач і рівнем знань за їх самооцінками.

Що ж спільного між коефіцієнтами τ та ρ і чим вони відрізняються?

Спільне полягає в тому, що вони вимірюють тісноту зв’язку між двома властивостями, за кожною з яких ранжуються елементи, а не вимірюються їх

значення на шкалах x і y. Тому ці коефіцієнти кореляції називають *коефіцієнтами рангової кореляції*.

Спільним для цих коефіцієнтів є також те, що для обох використана ідея визначення ступеня невпорядкованості (кількості інверсій) як міри зв'язку.

Відмінність же між цими коефіцієнтами полягає в тому, що при визначенні коефіцієнта τ фіксується тільки факт прямого або зворотного розташування рангів для кожної пари елементів незалежно від віддалення рангів один від одного. Наприклад, парам рангів 7 ← 6 і 7 ← 1 однаково приписується значення −1, а парам рангів 1 → 2 і 1 → 5 значення +1, тоді як при визначенні коефіцієнта ρ розраховується зважена інверсія, тобто враховується віддаленість рангів; наприклад, для інверсії 7 ← 6 відповідне значення дорівнює 1, а для інверсії 7 ← 1 значення дорівнює 6.

Звернемося до формули узагальненого коефіцієнта кореляції (9.8) і проаналізуємо її зміст для коефіцієнтів рангової кореляції Кендела і Спірмена.

Припустимо, сукупність опитуваних осіб ранжована і вишикувана у вигляді натурального ряду чисел за властивістю x. Тим самим визначається розташування рангів за властивістю y. Якщо позначити g_i та g_j ранги i-го і j-го елементів ряду x, то завжди для натурального ряду чисел $g_i<g_j$. У цьому разі для коефіцієнта Кендела всім парам рангів приписується значення +1. У формулі коефіцієнта кореляції R (9.8) набору пар рангів $g_i\, g_j$ відповідає позначення $a_{i\,j}$:

$a_{i\,j}=+1$ при $g_i < g_j$.

Якщо позначити h_i та h_j ранги двох елементів ряду y, то зміст змінних величин b_{ij} у формулі коефіцієнта кореляції R буде такий:

$b_{i\,j}= +1$ при $h_i< h_j$;

$b_{i\,j}= -1$ при $h_i> h_j$.

Тоді в чисельнику формули коефіцієнта кореляції R $\sigma_a^2 = \frac{1}{n}\sum a_{ij}^2$ буде така сама кількість від'ємних доданків, як інверсій у ряду y, а загальна сума відображає подвоєну (оскільки при підсумовуванні кожна пара $a_{ij}b_{ij}$ зустрічатиметься двічі: один раз у поєднанні ij, другий – у ji) різницю S між кількістю пар з прямим і зворотним порядками рангів. У знаменнику розглядуваного виразу два співмножники під коренем дорівнюють один одному, оскільки додатні й від'ємні одиниці у квадраті дають одиниці, і їх кількість у кожній сумі однакова і дорівнює кількості пар рангів кожного елемента ряду з кожним іншим: $\sum a_{ij}^2 = \sum b_{ij}^2 = n(n-1)$). Якщо підставити у формулу узагальненого коефіцієнта кореляції R (9.8) проінтерпретовані в такий спосіб окремі члени, одержимо формулу коефіцієнта рангової кореляції Кендела τ у розглянутому вигляді.

Нарешті зазначимо, що у прикладі для визначення коефіцієнтів рангової кореляції τ і ρ було використано короткий ранжований ряд чисельністю 7 студентів, а для обчислення коефіцієнта лінійної кореляції масив, що становив 200

осіб. Звичайно, за цією властивістю можна ранжувати і 200 осіб, проте проранжувати таку кількість елементів дуже важко.

У соціологічних дослідженнях часто одиницею ранжування вибирають не окремого індивіда, а групу індивідів. При цьому масив опитуваних осіб попередньо розподіляють на типові групи, наприклад, студентів за спеціальностями:

А – фізики,

Б – хіміки,

В – біологи,

Г – геологи,

Д – філологи,

Е – психологи,

Ж – соціологи.

Розподіл опитуваних осіб за дихотомічними запитаннями властивості x щодо кількості розв'язаних задач, яка визначає успішність студентів, і властивості y щодо використання студентами здобутих знань під час виробничої практики подамо у вигляді табл. 9.11.

Таблиця 9.11

Група опитуваних за спеціальностями		А	Б	В	Г	Д	Е	Ж
Частка відповідей "Так", %	*Запитання про успішність*	44	32	56	68	57	60	40
	Запитання про рівень знань	97	72	66	82	98	77	75

Із порівняння рядів розподілу випливає, що частка осіб, які відповіли "Так" на наведені запитання, різна для різних груп за спеціальностями і, отже, між цими запитаннями існує кореляційний зв'язок. Тепер у зв'язку зі збільшенням відносних частот присвоїмо групам за спеціальностями ранги і розташуємо їх за запитанням про успішність (щодо кількості розв'язаних задач зі спецкурсу) у вигляді натурального ряду чисел. Тоді відповідно відбудеться перестановка рангів і за запитанням про використання здобутих знань на практиці (табл. 9.12).

Таблиця 9.12

Група опитуваних за спеціальностями	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж
Частка відповідей "Так" щодо успішності, %	68	60	57	56	44	40	32
Ранг	1	2	3	4	5	6	7
Частка відповідей "Так" щодо використання здобутих знань, %	82	77	98	66	97	75	72
Ранг	3	4	1	7	2	5	6

Процедура ранжування 7 груп студентів за спеціальностями ідентична розглянутій раніше процедурі ранжування 7 студентів. У подальшому при визначенні коефіцієнтів рангової кореляції Кендела і Спірмена оперуватимемо тільки рядами рангів за раніше розглянутою методикою.

Обчислимо кількість пар з прямим порядком рангів:

$$P=4+3+4+0+2+1=14.$$

Підставивши одержане значення у формулу (9.12), дістанемо

$$\tau=\frac{2\cdot 14}{\frac{1}{2}\cdot 7\cdot(7-1)}-1=0,33.$$

Після цього визначаємо значення d_i і розрахуємо $\sum d_i^2=32$. Підставляючи одержане значення у формулу (9.13), дістаємо

$$\rho=1-\frac{6\cdot 32}{7^3-7}=0,43.$$

Отже, згідно з отриманими результатами між властивостями про успішність студентів (за кількістю розв'язаних задач зі спецкурсу) і застосування здобутих знань у практичній діяльності існує значний кореляційний зв'язок.

ТЕМА 10.

Оптимальний підхід та оптимізаційні моделі у вивченні соціальних процесів

1. Оптимальний підхід у вивченні соціальних процесів.
2. Оптимізаційні моделі трудових процесів.
3. Моделі масового обслуговування.
4. Використання методів динамічного програмування при моделюванні соціальних процесів.

1. Узагальнено кажучи, *моделювання соціальних процесів – це відображення дійсності у вигляді сукупності певних символів, знаків, суджень тощо.*

Перше завдання моделювання – *формалізація усталених якісних уявлень про суспільні явища.* Структура суспільної системи, структура особистості, взаємостосунки в групі, соціальні норми і т. ін. – все це в принципі може бути описане строгою формалізованою мовою. Процес формалізації уточнить або зробить зайвими чимало все ще наявних у сучасній соціології розпливчастих понять, викристалізує інтерпретацію досвіду та експерименту, створить основу для подальшого поглиблення змістового виміру дослідження суспільства,

Наступним, «активнішим» завданням є цілеспрямований математичний опис тих чи інших соціальних об'єктів – із одночасною розробкою відповідної змістової частини теорії. На цих напрямках необхідно виявляти різноманітні соціальні об'єкти, що є подібними за своєю «формальною структурою». Відтак можна зробити висновок, що «різні» об'єкти мають певну внутрішню спільність, і, вивчаючи один об'єкт, ми іноді можемо скласти доволі точне уявлення про інший об'єкт, але з тією-таки «формальною структурою».

Неминучим етапом на цьому шляху є ізольоване дослідження моделей. Але воно буде ефективним тільки до певного моменту, і то лише для цілком окремих завдань і ситуацій. Оскільки соціальна реальність утворює систему процесів, що взаємодіють, то й пізнання її має в принципі бути спрямованим до більш чи менш одночасного пізнання всіх взаємопов'язаних сторін, що на практиці не так просто здійснити. Відтак стає потрібним узгоджений опис різних статичних та динамічних соціальних об'єктів із різним ступенем збільшення параметрів, що дозволить прогнозувати і керувати поведінкою як мікроструктур, так і суспільства загалом. Варто одразу ж зазначити, що згадане завдання стосується не тільки соціології, а є також спільною проблемою і для суміжних наук — як-от, демографія, етнографія, економіка, соціальна психологія тощо.

Моделі соціальних процесів вибудовуються двома шляхами: «знизу» та «згори», тобто через певний ряд емпіричних узагальнень, що з самого початку стосуються вузького кола даних, і через дедуктивні побудови, співвідносяться з емпіричними вихідними даними.

Серед різних способів математичного опису соціальних об'єктів відзначимо два. Перший із них стосується комплексу уявлень, що розвиваються теорією систем і теоретичною кібернетикою. При такому підході моделюються найзагальніші властивості досліджуваних явищ на рівні досить високої абстракції. Вивчаються загальні властивості моделей, окреслених певною сукупністю змінних, з'ясовуються типи зв'язків між змінними, структура допустимої множини станів, можливі способи переходу з одного стану в інший, розглядається, яким чином система («автомат») пристосовується до різних змін середовища, як вона перебудовує свою структуру, як розвивається тощо. Дослідження такого плану бачаться досить багато обнадійливими і на рівні макро-моделей, тобто при описові най загальніших властивостей суспільства, і при докладному вивченні поведінки будь-якої малої соціальної групи чи певного суспільного механізму.

Другий підхід тісно пов'язаний із першим і може бути названий «теоретико-оптимальним» підходом до моделювання суспільних систем. Суть його полягає в тому, що множина можливих станів системи приймається за впорядковану завдяки певній функції (*цільовій функції*) системи, відтак стає можливим передбачати її майбутні стани, вирішуючи відповідні завдання на максимум або мінімум. Серед застосовуваних на цьому шляху спеціальних математичних дисциплін слід назвати теорію ігор, теорію корисності, математичне програмування тощо.

Використання функцій корисності звичайно передбачає раціональну поведінку модельованого об'єкта. Варто, однак, мати на увазі, що формалізоване подання мети певного об'єкта, по суті, є лише спосіб описування його поведінки, і ефективність такого способу повинна перевірятися на практиці.

З другого боку, дуже багато ситуацій можуть бути описані термінами цільових функцій, що виражають зацікавленість учасників досліджуваного процесу «підсистем», «гравців», «елементів». І саме в таких випадках треба вміти описати «відношення соціальної системи до допустимої множини своїх станів».

Необхідно подавати цілі та систему цінностей як *функції станів*. При описуванні складного соціального об'єкта (наприклад, великого колективу або населення району, міста) різні його частини можуть мати свою мету, свою структуру цінностей. Відтак перед дослідником постає складний комплекс взаємодії організованої множини елементів, кожному з яких притаманні особливі цільові функції. Тут постає завдання узгодити критерії оптимальності, завдання, особливо складне й цікаве при ієрархічній структурі основного об'єкта, коли цільові функції підсистем є залежними від параметрів системи. Найбільш рельєфно ці проблеми виступають (й інтенсивно розробляються) в теорії оптимального планування, в математичній економіці.

Щодо соціального процесу *оптимальний підхід* характеризується такими рисами.

По-перше, всі змінні, що характеризують досліджуваний соціальний процес, доводиться членувати на дві групи: *некеровані* та *керовані змінні.* При вивченні, наприклад, процесу міграції населення до некерованих змінних може бути віднесена та частина міграційного потоку, яка є неминучою і практично не піддається державному регулюванню.

По-друге, оптимальний підхід завжди пов'язаний із виявленням обмежувальних умов, у яких відбувається даний соціальний процес. Тому область існування обох змінних є обмеженою.

По-третє, оптимальний підхід передбачає наявність *цільової (критеріальної) функції,* екстремального значення якої він намагається досягти.

Соціальний процес різноманітний, і тому природним є застосування різних критеріїв. Одначе різноманітність критеріїв припустима тільки в тому випадку, коли всі вони мають однакову спрямованість, сприяючи реалізації глобальних цілей розвитку суспільства. Ця проблема майже зовсім не розроблена в науковій літературі. Належить дослідити окремі сторони глобальної мети розвитку суспільства і відтак виявити ієрархічну систему локальних критеріїв реалізації цієї мети щодо окремих соціальних процесів. Особливо потребує розгляду питання про врахування інтересів окремих соціальних груп.

Можна запропонувати *три шляхи* подолання згадуваних труднощів.

Перший шлях — формування локальних цільових функцій при дослідженні соціальних процесів, які характеризували б поліпшення найважливіших

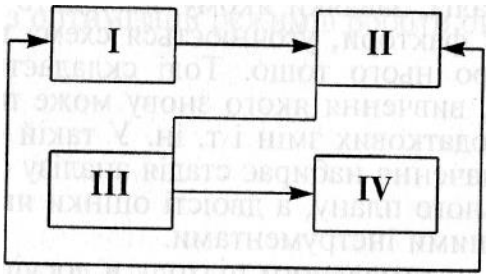
притаманних їм показників. Цей шлях пов'язаний із ретельною постановкою обмежень, в яких закріплюються умови та фактори, що не дістали виразу в цільовій функції, а також враховуються інтереси окремих соціальних груп.

Другий шлях — конструювання багатокомпонентних цільових функцій (наприклад, шляхом нормування рівня досягнень окремих результатів). Головний наголос тут ставиться не на обмеження, як у першому випадку, а на формування цільової функції.

Третій шлях визначення цільової функції полягає в *ігровому підході* до вивчення соціальних процесів. Використання методів *теорії ігор* прийнятне в тому випадку, коли в досліджуваному соціальному процесі діють різні сили, кожна з яких має свою мету, і «рівновага» встановлюється при суперечливому впливові цих сил. Коефіцієнти цільової функції при такому підході передаються показниками так званої *платіжної матриці гри*, в якій вказано «ціну» того чи іншого впливу сил, що діють у цьому соціальному процесі.

Оптимальний підхід до вивчення соціальних процесів через їхню особливу складність є поетапним підходом.

Типову схему оптимального підходу до планування соціальних процесів можна подати в такому вигляді:



I — виявлення некерованих і керованих змінних у соціальному процесі (прогнозування змін некерованих змінних); II — вирішення оптимальної задачі з визначення керованих змінних у соціальному процесі; III — визначення оптимальної системи заходів з реалізації оптимального плану; IV — встановлення залежностей між здійсненням окремих заходів та величиною керованих змінних процесу. I і IV блоки взаємозалежні, оскільки пов'язані з аналізом одного об'єкта, з урахуванням одних і тих самих умов і факторів.

Для оптимального підходу – а в цьому полягає одна з найважливіших його рис — характерне отримання оцінок двоїстості, що передають ефективність (із позицій цільової функції) умов та факторів, наявних у задачі. Ці показники дозволяють глибше проникати в суть одержаного оптимального рішення, збагнути його кількісну зумовленість, роль окремих факторів та умов у формуванні цього рішення.

Одержані внаслідок рішення оптимальної соціальної задачі двоїсті оцінки можуть знайти різноманітне застосування в соціальному плануванні, оскільки вони є інструментом глибшого пізнання даного соціального процесу. Вказуючи на «вузькі місця» плану, вони дозволяють накреслити і

активізувати додаткові можливості з поліпшення соціального планування і також є орієнтирами для прийняття тих чи інших рішень, особливо під час реалізації плану.

Складання оптимального плану щодо регулювання соціальних процесів є не одноразовим актом, а трудомістким творчим процесом. Після складання першого варіанта плану має здійснюватися його всебічний соціальний аналіз, завдяки якому знаходять вияв додаткові умови і фактори, уточнюється схема процесу, інформація про нього тощо. Тоді складається докладніший план, вивчення якого знову може показати необхідність додаткових змін і т. ін. У такій справі вирішального значення набирає стадія аналізу одержуваного оптимального плану, а двоїсті оцінки якраз і є його найважливішими інструментами.

Моделі лінійного програмування в дослідженнях соціальних процесів можуть мати обмежене поширення передусім *через стохастичність даних процесів.* Сферою застосування таких моделей, зокрема, можуть стати дослідження трудових ресурсів. Наприклад, модель визначення оптимальних міграційних потоків може бути в найпростіший спосіб подана у вигляді:

$$Z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\sum_i x_{ij} \geq b_j,$$

$$\sum_i x_{ij} \leq a_j,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}.$$

де: x_{ij} – розмір керованого міграційного потоку із i-того праценадлишкового району в j-тий праценедостатній район; b_j. – потреба в залученні додаткової робочої сили (за рахунок керованого міграційного потоку) в районі; a_j — ресурси робочої сили для керованої міграції з району i; c_{ij} – показники сукупних затрат на залучення робочої сили з району i в район j.

2.1. *Задача про призначення.*

Розглянемо структуру оптимізаційної моделі. Вона включає цільову функцію та систему обмежень. *Цільова функція* у математичній формі відображає певну мету і може досліджуватись на максимум або мінімум.

Загальна постановка задачі.

Нехай є m осіб, які можуть виконувати m різних робіт. Відома продуктивність C_{ik} працівника з номером i $(i = (\overline{1,m})$ при виконанні роботи виду k $(k = \overline{1,m})$. Кожна особа може виконувати тільки один вид роботи.

Потрібно закріпити працівників за видами робіт так, щоб сумарна продуктивність була максимальною.

Побудуємо оптимізаційну модель. Для цього використаємо невідомі x_{ik}, які означають призначення i -тої особи на роботу з номером k. Оптимізаційна модель має вид

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} C_{ik} X_{ik} \quad (\max)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} X_{ik} = 1, \quad X_{ik} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \\ \sum_{k=1}^{m} X_{ik} = 1, \quad i = \overline{1}, m; \quad k = \overline{1}, m. \end{cases}$$

Якщо $X_{ik} = 1$, то i-тий працівник повинен виконувати роботу виду k. Значення $X_{ik} = 0$ означає протилежне.

Для невеликих значень m задачу можна розв'язати перебором усіх можливих варіантів, число яких дорівнює m^2. Задачу розв'язують також як транспортну задачу математичного програмування. Оскільки транспортна задача досліджується на мінімум, то замість C_{ik} в таблицю записують $-C_{ik}$.

Приклад.

$$C_{ik} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 & 7 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 7 & 5 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Початкова таблиця, в якій план визначено методом найменшої вартості має вид

b_k / a_i	1	1	1	1	1	α_i
1	−5	−6	−6	−7	−7 1	0
1	−4	−6	−6	−7 1	−6 0	1
1	−6	−7	−7 1	−6 0	−5	2
1	−7	−7 1	−5 0	−6	−6	4
1	−7 1	−7 0	−5	−5	−4	4
β_k	-11	-11	-9	-8	-7	

Для перевірки на оптимальність методом потенціалів використовуються величини α_i, β_k, які визначаються із умови $\alpha_i + \beta_k = -C_{ik}$ (для заповнених клітинок).

При цьому приймаємо $\alpha_1 = 0$.

Перевірка на оптимальність і перехід до оптимальної таблиці не змінюють початкового розташування чисел «1».

Оптимальний розв'язок має вид

$$X_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Z_{\max} = 35.$$

2.2. *Багатоцільові оптимізаційні моделі. Побудова компромісних планів*.

Розглянемо задачу з двома цільовими функціями та одним обмеженням на фінансовий ресурс.

$$Z_1 = C_1 X_1 + C_2 X_2 \qquad (\max)$$
$$Z_2 = d_1 x_1 + d_2 x_2 \qquad (\max)$$

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 \le b \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Тут C_i означає прибуток від реалізації одиниці продукції i-того виду, d_i, a_i –витрати відповідно праці та фінансового ресурсу на виготовлення одиниці продукції i-того виду, b – запас фінансового ресурсу, x_i – обсяг виробництва продукції i-того виду.

Цільові функції Z_1, Z_2 відповідно означають максимум прибутку та зайнятості. Побудуємо компромісний план.

$$Z = x_3 \qquad (\min)$$

$$\begin{cases} \dfrac{Z_1^{\max} - Z_1}{Z_1^{\max}} \le x_3 \\ \dfrac{Z_2^{\max} - Z_2}{Z_2^{\max}} \le x_3 \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 \le b \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад.

$$Z_1 = 10x_1 + 2x_2 \qquad (\max)$$
$$Z_2 = 2x_1 + 10x_2 \qquad (\max)$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Розв'язки задач такі:

$Z_1^{\max} = 150, \quad x_1 = 15, \quad x_2 = 0.$

$Z_2^{\max} = 100, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 10.$

Задача для знаходження компромісного розв'язку має вид

$$Z = x_3 \qquad (\min)$$

$$\begin{cases} \dfrac{150 - 10x_1 - 2x_2}{150} \le x_3, \\ \dfrac{100 - 2x_1 - 10x_2}{100} \le x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Після спрощення одержимо

$$Z = x_3 \qquad (\min)$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 150x_3 \ge 150 \\ 2x_1 + 10x_2 + 100x_3 \ge 100 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0. \end{cases}$$

ЇЇ розв'язок $x_1 = 8{,}30; \quad x_2 = 4{,}47. \qquad Z_1 = 91{,}94; \qquad Z_2 = 61{,}30.$

Для компромісного варіанта прибуток і занятість зменшились у порівнянні з їх максимальними значеннями відповідно 150 та 100.

Для найбільшого прибутку зайнятість дорівнює $Z_2 = 2 \cdot 15 + 10 \cdot 0 = 30,$

для найбільшої зайнятості прибуток дорівнюватиме $Z_2 = 10 \cdot 0 + 2 \cdot 10 = 20.$

Отже, прибуток та зайнятість збільшились приблизно у три рази відповідно з величинами 30 та 20.

2.3. До *оптимізаційних моделей соціальних процесів територіальних суспільних систем* (ТСС) відносяться:

– модель Гуннара Мюрдаля (залежність між розвитком бізнесу, обсягами доходів фірм і населення, місцевими бюджетами і регіональною інфраструкту-

рою). В моделі обґрунтовується теза, що чим більш розвинена економіка регіону, тим більші надходження у вигляді податків фізичних і юридичних осіб отримують місцеві бюджети. Це відповідно стимулює фінансування розвитку соціальної інфраструктури регіону. Формуються більш сприятливі умови для ведення економічної діяльності, підвищується інвестиційна привабливість території. Мультиплікатор спрацьовує й у сфері доходів населення (розвинута економіка → висококваліфікована робоча сила → високі доходи → впорядкована і забезпечена соціальними благами територія → імміграція нових поселенців → ріст податкових надходжень у місцеві бюджети і т.д.). Це так звана шведська модель соціалізму;

– модель Харрода-Домара, в якій взаємозв'язок факторів соціального розвитку ТСС має наступну послідовність: район-лідер → високий рівень доходів → приплив робочої сили і капіталу → ріст обсягів податків до місцевого бюджету → розвиток соціальної сфери регіону;

– неокласична модель (зворотна до вищенаведених). Вважається, що нові регіони хоча вирізняються припливом капіталу, однак будують свою політику на використанні дешевої робочої сили ТСС.

Щодо моделей просторової соціально-економічної рівноваги соціальних процесів, то їх витоки пов'язані з розробкою вчення про просторову організацію господарства А.Льоша . Проводячи дослідження, автор висунув гіпотезу, згідно якої кожному виду діяльності відповідає своя межа концентрації (економії на масштабі), і перевищення котрої перекривається ростом транспортних витрат. Як наслідок – вченому вдалося здійснити грандіозний прорив у всій теорії розміщення, котрий забезпечив перехід від точкового до просторового розгляду її предмету (формування регіонів).

В 90-х роках ідеї даного вчення були використані при розробці концепції територіальної організації суспільства, суть якої зводилася до "територіального поділу праці, розміщення продуктивних сил, регіональних відмінностей у виробничих відносинах, розселення людей, взаємовідносин суспільства і природи, а також проблем регіональної "соціально-економічної політики". Однак на практиці управління споживчим попитом повністю заперечувало ринкові механізми впливу на власність (в т.ч. муніципальну), "працювало" на утвердження виключного контролю держави над цінами. Існувало засилля адміністративних методів (від запровадження інституту прописки до практики оргнабору трудових ресурсів на новобудови країни). Це вело до формування політики директивного централізованого територіального планування й перерозподілу суспільних благ у межах окремих ТСС. Соціальні норми і нормативи, які хоча й виступали в якості базових регуляторів територіального управління, доповнювалися низкою коригуючих регіональних коефіцієнтів. Як результат, модель розміщення перетворилася у квазімодель зрівнялівського типу. Цікаво, що у цьому процесі мала бути задіяна й культура (вірніше "часовий, конкретно-історичний зріз культурного процесу"). Згодом, фахівці констатували, що в умовах, які склалися "лише просторово організована культурна інфраструктура (зі всієї

множини культурних явищ геосфери) могла бути визначена як особлива територіальна система, інші ж системно-культурні утворення лише починали формуватися".

3. Сучасне суспільство не може обійтися без розгалуженої мережі *систем масового обслуговування.* До таких систем відносяться телефонні станції, магазини, поліклініки, підприємства громадського харчування, квиткові каси, автозаправні станції, перукарні, тощо. Не дивлячись на різноманітність, всі ці системи мають загальні риси і загальні проблеми.

Однією з таких загальних проблем є проблема черг. Коли ми приходимо в поліклініку, їдальню, магазин, перукарню, квиткову касу, нам, як правило, завжди доводиться встати в чергу. Черги підстерігають нас буквально на кожному кроці, віднімаючи час і порушуючи плани.

Зрозуміло, що джерело подібних проблем лежить у *випадковому характері* явищ, що відбуваються в системах масового обслуговування. Випадковий потік викликів, що поступають на телефонну станцію, випадкова тривалість телефонної розмови. Випадковості принципово не можна усунути. Але їх можна належним чином врахувати і, як наслідок, можна достатньо раціонально організувати процес масового обслуговування. Подібні питання почали досліджуватися в першій чверті нашого сторіччя. Були сформульовані і розглянуті математичні завдання, в яких моделювалися випадкові процеси в системах з дискретними станами. Виник і став розвиватися новий напрям в теорії ймовірності – теорія масового обслуговування.

Основні елементи системи: *вхідний потік вимог, пристрої* (*канали*) *обслуговування, черга вимог, вихідний потік* задоволених вимог.

Будь-яка система масового обслуговування призначена для виконання деякого *потоку заявок (вимог). У* ролі заявки може виступати поява пасажира в квитковій касі, виникнення несправності в пристрої, прихід судна в порт. Система має одну або декілька обслуговуючих одиниць, їх прийнято називати *каналами обслуговування.* Коли ви, прийшовши в перукарню, цікавитеся кількістю працюючих майстрів, ви тим самим з'ясовуєте, чому дорівнює в даному випадку число каналів обслуговування. У інших ситуаціях це є число касирів в квитковій касі, число телефонів на переговорному пункті, число причалів в порту, число колонок на автозаправній станції і т.д. Прийшовши в поліклініку до певного лікаря, ми маємо справу з одно-канальною системою масового обслуговування. Розглядаючи роботу тієї або іншої системи масового обслуговування, треба враховувати перш за все число каналів обслуговування, число заявок, що поступають на вхід системи в одиницю часу, тривалість обслуговування заявки. Істотно, що число заявок, що поступають в систему, моменти їх надходження, тривалість обслуговування заявки відносяться, як правило, до категорії випадкових *чинників.* Тому теорія масового обслуговування повинна розглядатися в рамках теорії *випадкових процесів. Випадкові* процеси такого

типу обговорювалися вище, враховуючи випадкові процеси з дискретними *станами. Переходи* системи з одних станів в інші відбуваються під дією потоку заявок, що поступають на вхід системи, і потоку *обслуговування. Під* останнім розуміється потік заявок, що обслуговуються одним безперервно зайнятим каналом системи.

Види систем масового обслуговування. Системи масового обслуговування бувають двох видів: системи *з відмовами і* системи *з чергою.* Якщо заявка поступає в систему з відмовами у момент часу, коли всі канали зайняті, то вона дістає «відмову» і виходить з гри. З такими системами ми знайомі на прикладі телефону. Якщо абонент зайнятий, ваша заявка дістає відмову, і ви можете повісити трубку. Повторно набираючи телефонний номер, ви тим самим посилаєте нову заявку.

Найчастіше на практиці зустрічаються системи з чергою, або, інакше, системи з очікуванням. Недаремно теорію масового обслуговування називають також *теорією черг.* У таких системах заявка, що з'явилася в мить, коли всі канали обслуговування зайняті, встає в *чергу* і чекає, поки не звільниться один з каналів. Існують системи з *необмеженою чергою* (заявка, що стоїть в черзі, рано чи пізно буде обслужена, при цьому число місць в черзі не обмежене) і системи з *обмеженою чергою.* Обмеження можуть бути різними — по числу заявок, що одночасно стоять в черзі (у черзі повинне бути не більше деякого числа заявок, всяка додаткова заявка дістає відмову); за часом перебування заявки в черзі (після деякого терміну перебування в черзі заявка, якщо вона не почала обслуговуватися, покидає чергу); за часом роботи системи (прийом заявок до обслуговування відбувається протягом певного часу) і т.д.

Враховується також дисципліна обслуговування. Зазвичай заявки обслуговуються в порядку їх надходження в систему. Але можливо також *обслуговування з пріоритетом,* коли деякі заявки обслуговуються поза чергою. При цьому заявка з вищим пріоритетом, поступивши в систему, може обірвати обслуговування заявки, що вже почалося, з меншим пріоритетом, а може дочекатися закінчення попереднього обслуговування. У першому випадку говорять про абсолютний *пріоритет*, а в другому – про відносний. *Системи* масового обслуговування завжди є багатокритеріальними; *вони* характеризуються набором *показників* ефективності. Як такі можуть виступати середнє число заявок, яке обслуговує система в одиницю часу; середнє число зайнятих каналів обслуговування; середнє число заявок, що знаходяться в черзі; середній час очікування обслуговування; середній відсоток заявок, які одержали відмову; ймовірність того, що заявка, що поступила в систему, буде негайно прийнята до обслуговування. Можливі також інші показники ефективності. Представляється цілком природним, що при організації роботи тієї або іншої системи масового обслуговування слід прагнути до скорочення середнього числа заявок, що знаходяться в черзі, до скорочення часу очікування обслуговування. Хотілося б зробити максимальною вірогідність того, що заявка, що поступила в систему, буде негайно прийнята до обслуговування, а середній відсо-

ток заявок, які одержали відмову, хотілося б звести до мінімуму. Для цього треба збільшувати продуктивність системи (зменшувати час обслуговування заявки), раціоналізувати режим роботи системи, збільшувати число каналів обслуговування. Проте при збільшенні числа каналів неминуче зменшується такий показник, як середнє число зайнятих каналів. Це означає, що зростає час, протягом якого той або інший канал не буде зайнятий обслуговуванням, простоюватиме. В результаті знизиться ефективність використання системи. Таким чином, виникає необхідність *оптимізації* роботи системи. Число каналів обслуговування не повинне бути надмірне малим (щоб не виникали довгі черги і не зростало число відмов), але воно не повинне бути і дуже великим (щоб не росли число і тривалість простоїв в каналах обслуговування).

При розрахунках використовують позначення:

m – кількість вимог (заявок на обслуговування);

S – кількість каналів обслуговування;

λ – інтенсивність потоку вимог (число заявок, що надходять у систему обслуговування за одиницю часу);

μ – продуктивність обслуговуючого пристрою (число заявок, що обслуговує пристрій за одиницю часу);

ρ – інтенсивність обслуговування:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{10.1}$$

P_k – ймовірність того, що в системі знаходиться k вимог:

$$P_k = (m-k+1)\cdot \rho \cdot P_{k-1}, \quad k = \overline{1,m}, \tag{10.2}$$

Ймовірність того, що в системі не буде жодної вимоги:

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{m}\frac{m!\rho^k}{(m-k)!}} \tag{10.3}$$

Математичне сподівання числа вимог у черзі:

$$M_ч = \sum_{k=S+1}^{m}(k-S)P_k \tag{10.4}$$

Коефіцієнт простою вимог у черзі:

$$\alpha_ч = \frac{M_ч}{m}. \tag{10.5}$$

Математичне сподівання числа вимог у системі (в черзі та на обслуговуванні):

$$M_C = \sum_{k=1}^{m} kP_k \qquad (10.6)$$

Коефіцієнт простою обладнання в системі становить:

$$\alpha_C = \frac{M_C}{m} \qquad (10.7)$$

Математичне сподівання простою каналів обслуговування в системі:

$$M_S = \sum_{k=0}^{S} (S-k)P_k. \qquad (10.8)$$

Коефіцієнта простою каналів обслуговування:

$$\alpha_S = \frac{M_S}{S}. \qquad (10.9)$$

Середній час очікування вимог у черзі:

$$t_ч = \frac{M_ч}{\lambda(m - M_C)}. \qquad (10.10)$$

Числові характеристики багатоканальної системи масового обслуговування.

Ймовірність того, що в систему надійде k вимог $(1 \le k \le m)$:

$$P_k = a_k P_0;$$

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{m-k+1}{k}\rho \cdot a_{k-1}, & якщо\ 1 \le k < S, \\ \dfrac{m-k+1}{S}\rho \cdot a_{k-1}, & якщо\ S \le k \le m, \end{cases} \qquad (10.11)$$

причому, $a_0 = 1$.

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{m} a_k}. \qquad (10.12)$$

Інші показники розраховуються за формулами (10.4)–(10.10).

4. Розглянемо ще один клас оптимізаційних моделей – задачі динамічного програмування. Динамічне програмування – це метод оптимізації багатокрокових задач, у яких прийняття рішень можна розбити на ряд послідовних кроків. В основі методу динамічного програмування лежить *принцип оптимальності*, вперше сформульований американським математиком Р. Беллманом (1920–1984): *оптимальна поведінка має таку властивість, що в якому б стані не знаходилася система і які б рішення не приймалися у попередні моменти, наступні*

рішення повинні бути оптимальними відносно стану, в якому опинилася система. Тобто завжди необхідно забезпечувати оптимальне продовження процесу відповідно до вже досягнутого стану.

Математична модель задачі динамічного програмування має вигляд:

$$F = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \quad (extr) \tag{10.13}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b_i, \\ &a_i \ge 0, \;\; x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{10.14}$$

Як бачимо, задача динамічного програмування за формою не відрізняється від задачі лінійного програмування, але вона має свої властивості:

1) Наявність лише одного обмеження.

2) Цілочисловість, бо a_i, x_i, b_i – цілі числа.

3) Аддитивність $F = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ або мультиплікативність $F = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ функції мети (мультиплікативну функцію за рахунок логарифмування можна перетворити в адитивну функцію).

Розв'язування задач динамічного програмування розбивається на декілька етапів. На кожному етапі знаходимо умовно оптимальне значення цільової функції. Набір рекурентних обчислювальних процедур (співвідношень), які зв'язують між собою різні етапи, забезпечує отримання оптимального розв'язку задачі в цілому при завершенні останнього етапу.

Постановка задачі. Припустимо, що існує певна кількість деякого ресурсу (X одиниць). Це може бути запас сировини, енергетичні ресурси, фінансові, трудові тощо. Існують n альтернативних варіантів використання цього ресурсу. У результаті використання ресурсу тим чи іншим варіантом отримується деяка вигода ($f(x)$), розмір якої залежить від кількості вкладеного ресурсу (x), а також від процесу (n), де конкретно використовується ресурс. Необхідно знайти такий розподіл, щоб загальна вигода (F) була найбільшою.

Розглянемо приклад оптимального розподілу фінансових ресурсів між інвестиційними проектами. Позначимо через x_i – розмір інвестицій, виділених під i-тий проект ($i = 1, n$), де i– індекс проекту. Має місце рівність

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = X \; . \tag{10.15}$$

На основі попереднього аналізу встановлено, що прибуток внаслідок реалізації i-того проекту задається функцією $f_i(x_i)$ (тобто залежить від виділеної під цей проект суми фінансових ресурсів x_i і не залежить від того, яка сума була виділена під інший проект). Тоді сумарний прибуток фірми становитиме

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \quad (max). \qquad (10.16)$$

Наша задача полягає у знаходженні таких значень $x_i \geq 0$, які задовольняють обмеження (10.15) і забезпечують максимум функції (10.16).

Для розв'язування даної задачі використовують *рівняння Р. Беллмана:*

$$F_k(X) = \max_{0 \leq x_k \leq X} [\, f_k(x_k) + F_{k-1}(X - x_k)] \qquad (10.17)$$

Рівняння типу (10.17) називається *рекурентним співвідношенням*, яке є математичним відображенням вищезгаданого принципу оптимальності Р. Беллмана.

Алгоритм розв'язування задачі (10.15), (10.16) методом динамічного програмування складається з двох частин. Перша частина – розв'язування рекурентних рівнянь виду (10.17), друга – формування оптимального розв'язку задачі.

ТЕМА 11.

Теоретико-ігровий підхід у моделюванні соціальних процесів

1. Поняття теоретико-ігрового підходу.

2. Основні відомості з теорії ігор.

3. Розв'язання гри в змішаних стратегіях. Основна теорема теорії матричних ігор.

4. Прийняття рішень в умовах цілковитої визначеності. Метод аналізу ієрархій.

5. Прийняття рішень в умовах невизначеності.

1. Взаємозв'язок між людьми, підприємствами, колективами у математичному моделюванні прийнято розглядати у вигляді взаємодіє підсистем деякої складної системи. Сумарним результатом такої взаємодії є спостереження за поведінкою самої складної системи, а також її підсистем. Найбільш наочним прикладом такої взаємодії є розвиток соціальних систем.

Якщо розглянути деяку соціальну систему (підсистему деякої загальної системи): сім'ю, соціальну групу, підприємство (як колектив людей, наділених відповідними виробничими функціями), місто, галузь, регіон і т. д., то можна виділити деякі загальні для будь-якої підсистеми властивості:

а) наявність декількох активних учасників;

б) наявність у кожного з них своєї мети;

в) наявність у них бажання реалізувати свою мету як всередині системи, так і з її допомогою у зовнішньому середовищі;

г) наявність деякого переліку допустимих для реалізації цієї мети дій;

д) наявність правил поведінки, прийнятних для досягнення поставленої мети;

е) наявність критеріїв порівняння отриманого результату з іншими можливими результатами і визнання успіху в досягненні мети;

є) наявність можливості функціонувати в умовах часткової або повної невизначеності в інформації про поведінку інших підсистем;

ж) наявність можливості оцінки стану системи як результату взаємодії підсистем, що входять до неї;

з) наявність значної частки випадкових і невизначених факторів, що впливають на поведінку системи.

Для опису поведінки складних систем, які складаються з активних елементів, розроблено декілька математичних теорій, що дозволяють описати різні аспекти функціонування цих систем. До них належить, перш за все, класична теорія ігор, імітаційне моделювання, теорія ігор з непротилежними інтересами, теорія активних систем.

Особливе місце займає математична теорія ігор, яка досліджує такі фундаментальні поняття, як розумність поведінки, конфлікт, створення коаліцій, вибір стратегії. Адже, взаємодія між людьми зазвичай включає в себе досить тонке поєднання конкуренції і кооперації. Подібні ситуації стали відомими тепер під назвою *ігри*.

Конфліктні ситуації, при яких сторони-учасники переслідують прямо протилежні цілі, називаються *іграми*.

За допомогою теорії ігор можна здійснювати математичний аналіз соціальних протиріч. Можна аналізувати і такі явища, які тлумачаться, як конфлікти. Зокрема, до таких явищ належить прийняття рішень в умовах невизначеності. Під конфліктом можна розуміти і прийняття рішення, яке слід оптимізувати одночасно по декількох параметрах.

Назвемо декілька напрямів використання теорії ігор при дослідженні соціальних процесів.

- Задача аналізу соціологічної інформації – задача перевірки інформації, отриманої за допомогою анкет, формулюється як матрична гра з природою.
- Задача дослідження внутрішніх і зовнішніх конфліктів, притаманних системі.

- Задача дослідження протиріч, що виникають при зростанні міст.
- Задача прийняття оптимальних рішень в конфліктних ситуаціях.
- Задача управління поведінкою структурних підрозділів для максимізації цільової функції колективу (колективної вигоди).
- Задача дослідження процесів соціального вибору тощо.

Як приклад теоретико-ігрового підходу до моделювання соціальних процесів розглянемо модель оптимального розподілу робочої сили по галузях народного господарства і економічних районах на основі створення матеріальної зацікавленості працівників у переміщенні з територій з надлишком робочої сили до територій з її недостачею. Вводиться система додаткових надбавок. Ці надбавки до зарплати і фонду суспільного споживання повинні будуватися таким чином, щоб розподіл трудових ресурсів по економічних районах у відповідності до оптимального плану був би оптимальним і для кожного працівника.

При моделюванні процесів, що відбуваються в суспільстві, найбільш часто використовуються матричні ігри. Вони більш наочні, легко зводяться до задач лінійного програмування, можуть інтерпретуватися як процедура прийняття рішень в умовах невизначеності.

Розглянемо застосування матричних ігор для розв’язання проблеми розвитку інфраструктури. В цілому задачі розвитку як виробничої, так і невиробничої інфраструктур у всіх своїх аспектах добре описуються мовою теорії ігор. Причому в цих задачах може знайти застосування більшість розділів класичної теорії ігор.

Слід враховуючи специфіку прийняття рішення про розвиток інфраструктури (прийняття рішення в умовах деякої невизначеності), адже необхідно враховувати ряд факторів, які набувають множини своїх можливих значень в момент реалізації прийнятих рішень, або динаміку зміни значень цих факторів. Невизначеність можуть вносити зміни в демографічних, соціальних процесах (зокрема, зміни орієнтації населення в сфері споживчої поведінки, трудової орієнтації, територіальної орієнтації і міграційної поведінки, створення сімї, цінності вільного часу і характеру його використання тощо). Комбінація цих факторів в момент прийняття рішення може виявитися погано прогнозованою з заданою точністю, і як наслідок, прогнозувати будемо перелік можливих потреб в заходах по розвитку інфраструктури.

Теоретико-ігрових підхід дає можливість вибрати ті варіанти, які дають найменші можливі втрати. Критерієм оптимальності буде найменший гарантований результат від реалізації капіталовкладень в розвиток соціальної інфраструктури, а елементом матриці гри – різниця між істинними і очікуваними (згідно даному варіанту) потреб. Разом з тим, кожний елемент соціальної інфраструктури буде оцінюватися згідно свого функціонального призначення, за

кінцевими (соціальними) показниками розвитку (вільний час і ефективність його використання, створення сприятливого клімату в місті тощо).

2. Розглянемо основні поняття теорії ігор. Як вже зазначалося в попередньому пункті, конфліктні ситуації, при яких сторони-учасники переслідують прямо протилежні цілі, називаються *іграми*.

Нехай у грі беруть участь два гравці: *A* і *B*.

Гра називається *грою з нульовою сумою* (матричною грою), якщо виграш гравця *A* дорівнює програшу гравця *B* (або навпаки).

Гравці *A* і *B* виконують ряд послідовних ходів, тобто ряд послідовних дій, передбачених правилами гри.

Стратегія гравця – це сукупність правил, що визначають вибір варіанта дій під час кожного ходу залежно від ситуації, що склалася в ході гри.

Теорія ігор дає вказівки гравцям під час вибору ходів, тобто рекомендує їм кращі стратегії.

Завдання пари стратегій гравців *A* і *B* у грі двох осіб цілком визначає її результат, тобто виграш одного гравця і програш іншого. Гра називається *скінченою*, якщо в кожного гравця є лише скінчена кількість стратегій. Якщо таких стратегій нескінченно багато (навіть, якщо тільки в одного гравця), то гра називається *нескінченною*.

Розглянемо скінчену гру двох учасників. Якщо в розпорядженні першого гравця *A* є *m* стратегій, а у другого гравця *B* – *n* стратегій, то гру можна повністю виразити шляхом задання її платіжної матриці $A=\{a_{ij}\}$ (табл. 11.1), причому елемент a_{ij} означає виграш гравця *A*, який застосував стратегію A_i у випадку, якщо конкурент застосував стратегію B_j. Від'ємні елементи платіжної матриці означають величину програшу гравця *A* (водночас вони свідчать про величину виграшу гравця *B*).

Таблиця 11.1 – *Платіжна матриця гри*

B / A	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n	β_j
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	
…	…	…	…	…	…	…	
A_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}	
…	…	…	…	…	…	…	
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	
α_i							β / α

Розглянемо платіжну матрицю загального вигляду (табл. 11.1) для того, щоб узагальнити правила визначення розв'язку гри. Припустимо спочатку, що гра складена таким чином, що існує її розв'язання в чистих стратегіях. Спочатку визначимо найкращу зі стратегій гравця A, тобто найкращу з A_1, A_2, …, A_m з урахуванням того, що на будь-яку стратегію A_i гравець B відповість стратегією B_j, для якої виграш гравця A виявиться мінімальним. Щоб знайти стратегію B_j, треба в рядку платіжної матриці, що відповідає стратегії A_i (рядку з номером i), знайти мінімальне з чисел a_{ij}:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}\ , j=1,2,\ldots,n. \qquad (11.1)$$

Природно, що гравцеві A вигідніше за все зупинитися на такій стратегії A_i, для якої значення α_i буде максимальним. Позначимо це максимальне значення через α:

$$\alpha = \max_i \alpha_i,\ i=1,2,\ldots,m$$

або

$$\alpha = \max_i \min_j \alpha_{ij}. \qquad (11.2)$$

Величину α прийнято називати *нижньою ціною гри* або *максимінним виграшем* (скорочено *максиміном*). Стратегію гравця A, що відповідає максиміну α, назвемо *максимінною стратегією*.

Якщо гравець A дотримуватиметься максимінної стратегії, то за будь-якої поведінки гравця B йому гарантований виграш не менше за величину α. Тому величину α називають *нижньою ціною гри*, тобто це той гарантований мінімум, який одержить гравець A в даній грі.

Аналогічно можна визначити найкращу зі стратегій гравця B. Він прагне звести виграш гравця A до мінімуму. Для цього гравець B намагається для кожної своєї стратегії B_j одержати максимальне значення виграшу за будь-якої стратегії гравця A, тобто він визначає значення β_j таке, що

$$\beta_j = \min_i a_{ij},\ i=1,2,\ldots,m. \qquad (11.3)$$

Однак гравець B не може розраховувати на те, що гравець A дозволить йому одержати якийсь з виграшів β_j. Єдине, на що може розраховувати гравець B, так це на те, що одержить виграш, не менше за величину β, обумовлену виразом:

$$\beta = \min_i \max_j a_{ij}. \qquad (11.4)$$

Така величина β називається *верхньою ціною гри*, або *мінімаксним виграшем* (*мінімаксом*). Відповідна мінімаксу стратегія гравця B називається *мінімаксною стратегією*. Ця стратегія гравця B є найбільш обережною, що забезпечує йому в будь-якому випадку програш не більший за величину β.

У теорії ігор принцип обережності, що рекомендує гравцям дотримуватись максимінної і мінімаксної стратегій, називається *принципом мінімакса*. Він випливає з припущення про обережність гравців або з бажання розв'язати конфліктну ситуацію найкращим чином для всіх сторін, що беруть участь у ній.

Якщо верхня ціна гри збігається з нижньою ціною, то їх загальне значення $\alpha = \beta = v$ називається *чистою ціною* гри.

Мінімаксні стратегії, що відповідають чистій *ціні гри, є оптимальними стратегіями, а їхня сукупність – оптимальним* розв'язком. Пара чистих стратегій дає оптимальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли відповідний їй елемент m_{ij} є одночасно найбільшим у своєму стовпчику і найменшим у своєму рядку. У цьому випадку говорять, що гра має *сідлову* точку.

Гра, для якої $\alpha=\beta$, називається грою із *сідловою* точкою.

Якщо $\alpha \neq \beta$, то для розв'язання гри необхідно знайти частоти використання кожної із стратегій p_i, а також реальну ціну гри v:

$$\alpha \leq v \leq \beta \qquad (11.5)$$

У такому випадку кажуть, що гра розв'язується в *змішаних стратегіях*.

3. Змішані стратегії являють собою математичну модель гнучкої тактики гравця, за якої конфронтуючий йому гравець не може знати заздалегідь того положення, з яким йому доведеться зустрітися в грі, так як перед кожною партією здійснюється випадковий вибір однієї з чистих стратегій за допомогою деякого механізму, який проводить цей вибір з визначеними і заздалегідь заданими ймовірностями. Покажемо, як визначити ці ймовірності, виходячи з вимоги одержання максиміна, тобто оптимального розв'язку гри.

Розглянемо, як і раніше, гру $m \times n$, коли гравець A має m стратегій, а гравець B – n стратегій. Введемо позначення для змішаних стратегій гравців A і B:

$$S_A=S_A(p_1, p_2, \ldots, p_m);$$

$$S_B=S_B(q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

де $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – імовірності використання чистих стратегій $A_1, A_2, \ldots, A_m$;

$q_1, q_2, \ldots, q_n$ – імовірності чистих стратегій $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Оскільки ці стратегії за умовою гри цілком вичерпують можливі ходи гравців A і B, то вони утворюють повну групу подій. Тому для імовірностей p_i і q_j справедливі, відповідно, умови

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1; \ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Очевидно, кожна чиста стратегія є частинним випадком змішаної стратегії, коли всі стратегії, крім обраної чистої стратегії, мають імовірності, рівні нулю, а обрана стратегія – імовірність, рівну одиниці.

Основна теорема матричних ігор: будь-яка матрична гра має розв'язок в змішаних стратегіях.

Із цієї теореми випливає, що кожна матрична гра має ціну ν, причому ця ціна завжди лежить між нижньою α і верхньою β ціною гри: $\alpha \le \nu \le \beta$.

Дійсно, α є мінімальний гарантований виграш, який може забезпечити собі гравець *A*, застосовуючи тільки свої чисті стратегії. Застосовуючи змішані стратегії, гравець *A* в усякому разі не зменшить свій виграш, тобто $\alpha \le \nu$. Для гравця *B* аналогічні міркування приведуть до висновку, що $\nu \le \beta$. Тому в загальному випадку $\alpha \le \nu \le \beta$.

Якщо в деякій грі $m \times n$ знайдене оптимальне рішення, що полягає у використанні двох оптимальних змішаних стратегій вигляду:

$$S_A^*(p_1, p_2, ..., p_m);$$

$$S_B^*(q_1, q_2, ..., q_n)$$

то чисті стратегії A_1, A_2, …, A_m і B_1, B_2, …, B_n, для яких імовірності p_i і q_j виявилися відмінними від нуля, називаються *активними стратегіями* гравців *A* і *B*.

У теорії ігор доводиться *теорема про активні стратегії*: якщо один із гравців дотримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то його виграш не менший за ціну гри, незалежно від того, що робить інший гравець.

Зміст цієї теореми полягає в тому, що якщо один із гравців почне послідовно дотримуватися своєї оптимальної змішаної стратегії, то конфронтуючий йому гравець уже не зможе змінити результат гри.

Покажемо, що розв'язання будь-якої скінченої гри може бути зведене до задачі лінійного програмування.

Будемо вважати, що платіжна матриця гри A=$|a_{ij}|$ є відомою. Знайдемо розв'язок гри, тобто дві оптимальні змішані стратегії гравців *A* і *B*:

$$S_A^*(p_1, p_2, ..., p_m);$$

$$S_B^*(q_1, q_2, ..., q_n).$$

Знайдемо спочатку оптимальну стратегію S_A^*. Ця стратегія повинна забезпечувати гравцю *A* виграш не менше ν за будь-якої поведінки гравця *B* і виграш, який дорівнює ν, за оптимальної поведінки гравця *B*.

Припустимо, що ціна гри $\nu > 0$. Дійсно, для виконання умови $\nu > 0$ достатньо, щоб всі елементи платіжної матриці A=$|a_{ij}|$ були невід'ємними. Цього можна домогтися в будь-якій грі, додаючи до всіх елементів a_{ij} досить велику величину *K*. При цьому ціна гри збільшиться на *K*, а сам розв'язок (вибір стратегій) не зміниться.

Припустимо далі, що гравець A застосовує свою оптимальну змішану стратегію S_A^* (поки що нам невідому), а гравець B – тільки будь-яку свою чисту стратегію B_j. Тоді середній виграш гравця A складе:

$$a_j = p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + ... + p_m a_{mj}. \tag{11.6}$$

Але кожне з чисел a_j не може бути меншим за v відповідно до теорем теорії ігор. Звідси одержуємо в загальному випадку n нерівностей:

$$\begin{cases} p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + ... + p_m a_{m1} \geq v, \\ p_1 a_{12} + p_2 a_{22} + ... + p_m a_{m2} \geq v, \\ ... \\ p_1 a_{1n} + p_2 a_{2n} + ... + p_m a_{mn} \geq v. \end{cases} \tag{11.7}$$

Уведемо нові позначення: $x_1 = \frac{p_1}{v}$, $x_2 = \frac{p_2}{v}$,..., $x_m = \frac{p_m}{v}$.

Тоді, після ділення всіх нерівностей на ν, одержимо:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + ... + a_{m1} x_m \geq v, \\ a_{12} x + a_{22} x_2 + ... + a_{m2} x_m \geq v, \\ ... \\ a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + ... + a_{mn} x_m \geq v, \end{cases} \tag{11.8}$$

де за умовою всі x_i – невід'ємні змінні, які задовольняють умові: $x_1 + x_2 + ... + x_m = \frac{1}{v}$.

Гравець A прагне, щоб його гарантований виграш v максимальним. Це значить, що величина $\frac{1}{v}$ повинна набути мінімального значення. Таким чином, задача розв'язання гри звелася до наступної задачі лінійного програмування: визначити невід'ємні значення змінних x_1, x_2, …, x_m, які надають мінімального значення лінійній функції

$$L(\bar{x}) = x_1 + x_2 + ... + x_m = \min,$$

за умови, що виконуються зазначені обмеження.

Аналогічно, послідовно фіксуючи чисті стратегії A_i гравця A, оптимальну стратегію гравця B визначимо, вирішуючи наступну задачу лінійного програмування: визначити такі невід'ємні значення змінних y_1, y_2, …, y_n, які надають максимального значення лінійній функції

$$L(\bar{y}) = y_1 + y_2 + ... + y_m = \max,$$

за умови, що виконуються обмеження:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \le 1, \\ a_{21}y + a_{22}y_2 + ... + a_{1n}y_n \le 1, \\ ... \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \le 1, \end{cases} \qquad (11.9)$$

де $y_1 = \frac{q_1}{v}$, $y_2 = \frac{q_2}{v}$,..., $y_n = \frac{q_n}{v}$.

Замість вимоги мінімізації функції $L(\bar{x}) = \frac{1}{v}$ використовується вимога максимізації функції $L(\bar{y}) = \frac{1}{v}$, так як гравець *B* на відміну від гравця *A* прагне мінімізувати *v* (програти якнайменше).

Отже, розв'язування гри $m \times n$ звелося до розв'язування двоїстої пари задач лінійного програмування. Відповідно до теорем теорії ігор, розв'язок задачі завжди існує.

4. Теорія ігор використовується не тільки для опису поведінки складних систем в умовах зіткнення інтересів, необхідності координації своєї поведінки, вибору оптимальних способів поведінки в конфліктних ситуаціях, але і для прийняття рішень в умовах невизначеності. Для цього існує розділ теорії ігор – ігри з природою. В таких іграх одним учасником є особа, яка приймає рішення, в іншим – «природа», яка відображає деяку сукупність факторів (попит на ринку, якість роботи, стан суспільства, демографічний і соціальний розвиток), що впливають на прийняте рішення, і визначає ситуацію, від якої залежить виграш особи, що приймає рішення.

У залежності від інформованості особи, яка приймає рішення, задачі поділяються на три рівні:

1-й рівень – детермінований, в якому особа, яка приймає рішення, точно знає всі обставини прийняття рішення.

2-й рівень – стохастичний, в якому особа, яка приймає рішення, знає лише множину можливих обставин, в яких необхідно прийняти рішення, а також ймовірнісний розподіл цих обставин.

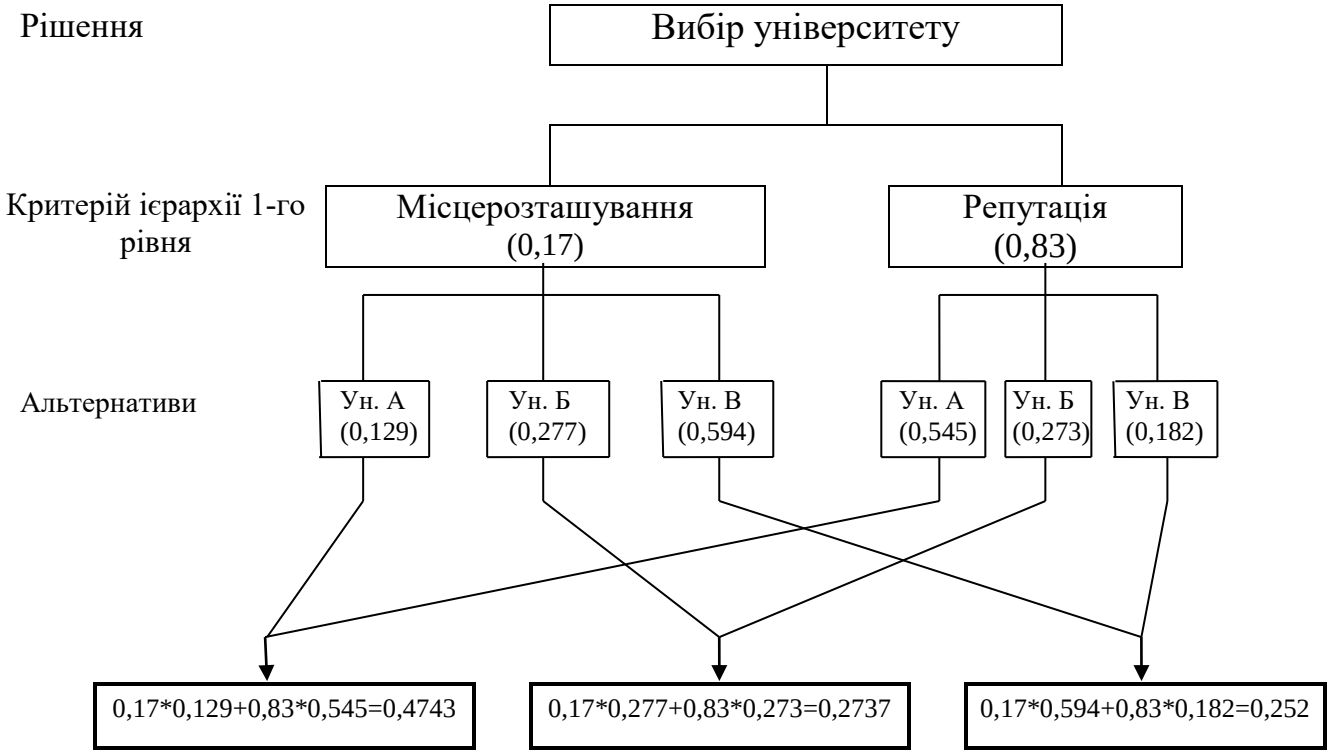
3-й рівень – невизначеність, в якому особа, яка приймає рішення, знає лише множину варіантів обставин, але ні їх ймовірності, ні їх можливі реалізації їй невідомі (тобто дані обставини неможливо кваліфікувати за мірою значущості для прийняття рішень і вони розглядаються як реалізація випадкових величин чи процесів, для яких невідома функція розподілу та інші статистичні характеристики). У цьому випадку слід говорити про прийняття рішення в умовах невизначеності. Прагнення вибрати рішення, що максимізує мінімальний виграш, вимагає використання для цього типу задач принципу максиміну.

У цьому питанні розглянемо ще один підхід до прийняття рішень в ситуаціях, коли, наприклад, для ідей, почуттів, емоцій визначаються деякі кількісні показники, що забезпечують числову шкалу переваг для можливих альтернативних рішень. Цей підхід відомий як *метод аналізу ієрархій*. Розглянемо його на наступному прикладі.

Перед випускником середньої школи Богданом постає питання про вибір університету для подальшого навчання. Серед можливих вузів він вибрав три – А, Б, В, сформувавши два критерії: місце розташування та академічна репутація вузу. При цьому він оцінює академічну репутацію вузу у п'ять разів вище, за його місцезнаходження. Тому репутації університету приписується питома вага близько 83%, а його місцезнаходженню – 17%. На основі попередніх розрахунків *системного аналізу* (схему яких викладемо нижче), отримані такі результати (у відсотках, %):

Критерії	**Університет**		
	А	*Б*	*В*
Місцезнаходження	12,9	27,7	59,4
Репутація	54,5	27,3	18,2

Таким чином, задача має один ієрархічний рівень з двома критеріями (місце розташування та репутація) і трьома альтернативними рішеннями (університети А, Б, В).



Оцінка трьох університетів ґрунтується на обчисленні *комбінованого зваженого* коефіцієнта для кожного з них:

Університет А: 0,17*0,129+0,83*0,545=0,474.

Університет Б: 0,17*0,277+0,83*0,273=0,2737.

Університет В: 0,17*0,594+0,83*0,182=0,252.

Таким чином, університет А отримує найбільшу комбіновану вагу,і отже, є найбільш оптимальним вибором випускника Богдана.

Загальна структура методу аналізу ієрархій може включати декілька ієрархічних рівнів зі своїми критеріями. Припустимо, що в розглянутому вище прикладі сестра-близнюк Богдана Марія також стоїть перед вибором університету. Однак їхні батьки ставлять умову, щоб діти навчалися в одному університеті, щоб разом добиратися до нього. Вводяться величини p и q (приблизно рівні), які відображають вагові коефіцієнти точки зору Богдана і Марії відносно процесу вибору вузу. Другий ієрархічний рівень використовує ваги (p_1, p_2) та (q_1, q_2) для відображення індивідуальних точок зору відносно критеріїв місцезнаходження і академічної репутації кожного університету. Інша частина структури прийняття рішення може тлумачитися аналогічно попередньому прикладу. Зауважимо, що $p + q = 1$, $p_1 + p_2 = 1$, $q_1 + q_2 = 1$, $p_{11} + p_{12} + p_{13} = 1$, $p_{21} + p_{22} + p_{23} = 1$, $q_{11} + q_{12} + q_{13} = 1$, $q_{21} + q_{22} + q_{23} = 1$.

Складність методу аналізу ієрархій полягає у визначенні відносних вагових коефіцієнтів (які ми використовували у попередніх прикладах) для оцінки альтернативних рішень. Якщо маємо n критеріїв на заданому рівні ієрархії, відповідна процедура створює матрицю $\boldsymbol{A}$ розміром $n \times n$ (*матрицю парних порівнянь*), яка відображає думку особи, яка приймає рішення, відносно важливості різних критеріїв. Парне порівняння виконується таким чином, що критерій у ряду i (i=1,2,…n) оцінюється відносно кожного із критерію, представлених n стовпчиками. Позначимо через a_{ij} елемент матриці $\boldsymbol{A}$, який знаходиться на перетині i-го рядка та j-го стовпця. Для опису згаданих оцінок використовуються натуральні числа від 1 до 9. При цьому a_{ij}=1 означає, що i-тий та j-тий критерії однаково важливі, a_{ij}=5 відображає думку, що i-тий критерій значно важливіший за j-тий, а a_{ij}=9 означає, що i-тий критерій надзвичайно важливий за j-тий. Узгодженість таких позначень забезпечується наступною умовою: якщо $a_{ij}=k$, то автоматично $a_{ij}=1/k$. Крім того, всі діагональні елементи матриці $\boldsymbol{A}$ повинні бути рівні 1, оскільки відображають оцінку критеріїв відносно самих себе.

Покажемо, як визначається матриця порівняння $\boldsymbol{A}$ для задачі вибору Богдана з нашого прикладу. Почнемо з головного ієрархічного рівня з критеріями академічної репутації університету і його місцезнаходження. З точки зору Богдана, академічна репутація університету значно важливіша його місцезнаходження. Отже, він надає елементу (2; 1) матриці $\boldsymbol{A}$ значення 5, тобто a_{21}=5, що автоматично означає, що a_{12}=1/5. Позначивши через R та M критерії репутації університету і його місцезнаходження, можна записати матрицю порівняння наступним чином:

$$\boldsymbol{A}= \begin{array}{c} \\ M \\ R \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Питомі ваги критеріїв R та M визначаємо шляхом ділення елементів кожного стовпця на суму елементів цього ж стовпця. Таким чином, для нормалізації матриці А ділимо елементи першого стовпця на величину 1+5=6, елементи другого – на величину 1+1/5=1,2. Шукані питомі ваги w_M та w_R обчислюються у вигляді середніх значень елементів відповідних рядків нормалізованої матриці $\boldsymbol{A}$. Отже,

$$\boldsymbol{N}=\begin{array}{c} \\ M \\ R \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}17 & 0{,}17 \\ 0{,}83 & 0{,}83 \end{pmatrix} \end{array}$$

w_M =(0,17+0,17)/2=0,17; w_R=(0,83+0,83)/2=0,83.

Стовпці матриці $\boldsymbol{N}$ однакові, що має місце лише у випадку, коли особа, що приймає рішення, проявляє ідеальну узгодженість у визначенні елементів матриці $\boldsymbol{A}$. Відносні питомі ваги альтернативних рішень стосовно університетів А, Б, В обчислюються в межах кожного критерію R та M з використанням наступних двох матриць порівняння.

$$\boldsymbol{A_M}=\begin{array}{c} \\ \text{А} \\ \text{Б} \\ \text{В} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{А} & \text{Б} & \text{В} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/5 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Суми елементів стовпців =[8; 3,5; 1,7]

$$\boldsymbol{A_R}=\begin{array}{c} \\ \text{А} \\ \text{Б} \\ \text{В} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{А} & \text{Б} & \text{В} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Суми елементів стовпців =[1,83; 3,67; 5,5]

При діленні елементів кожного стовпця матриць $\boldsymbol{A_M}$ та $\boldsymbol{A_R}$ на суму елементів цих ж стовпчиків отримуємо відповідні нормалізовані матриці:

$$\boldsymbol{N_M}=\begin{array}{c} \\ \text{А} \\ \text{Б} \\ \text{В} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{А} & \text{Б} & \text{В} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}143 & 0{,}118 \\ 0{,}250 & 0{,}286 & 0{,}294 \\ 0{,}625 & 0{,}571 & 0{,}588 \end{pmatrix} \end{array}$$

Середні значення елементів рядків

$w_{M\,\text{А}}$ =(0,125+0,143+0,188)/3=0,129

$w_{M\,\text{Б}}$ =(0,250+0,286+0,294)/3=0,277

$w_{M\,\text{В}}$ =(0,625+0,571+0,588)/3=0,594

$$\boldsymbol{N_R}=\begin{array}{c} \\ \text{А} \\ \text{Б} \\ \text{В} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{А} & \text{Б} & \text{В} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}545 & 0{,}545 & 0{,}545 \\ 0{,}273 & 0{,}273 & 0{,}273 \\ 0{,}182 & 0{,}182 & 0{,}182 \end{pmatrix} \end{array}$$

Середні значення елементів рядків

$w_{R\,\text{А}}$ =(0,545+0,545+0,545)/3=0,545

$w_{R\,\text{Б}}$ =(0,273+0,273+0,273)/3=0,273

$w_{R\,\text{В}}$ =(0,182+0,182+0,182)/3=0,182

Величини ($w_{M\,А}$, $w_{M\,Б}$, $w_{M\,В}$)=(0,129; 0,277; 0,594) – це питомі ваги відносно місцезнаходження університетів, а ($w_{R\,А}$, $w_{R\,Б}$, $w_{R\,В}$)=(0,545; 0,273; 0,182) – питомі ваги відносно академічної репутації університетів А, Б, В.

Узгодженість матриці порівняння. З наведених розрахунків бачимо, що стовпці нормалізованих матриць $\boldsymbol{N}$ та $\boldsymbol{N_R}$ однакові, а стовпці матриці $\boldsymbol{N_M}$ – ні. Однакові стовпці вказують на те, що питомі ваги зберігають значення незалежно від того, як виконувалося порівняння. У цьому випадку говорять, що вихідні матриці $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A_R}$ є узгодженими, а матриця $\boldsymbol{A_M}$ – ні. Узгодженість означає, що рішення буде узгоджене з визначенням парних порівнянь критеріїв або альтернатив. З математичної точки зору узгодженість матриці $\boldsymbol{A}$ означає, що $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$ для всіх i, j та k. Наприклад, в матриці $\boldsymbol{A}$ нашого прикладу $a_{13} = 3$ і $a_{12} \cdot a_{23} = 2 \cdot 3/2 = 3$. Властивість узгодженості вимагає лінійної залежності стовпців (і рядків) матриці $\boldsymbol{A}$. Зокрема, стовпці будь-якої матриці розміром 2×2 є залежними, а отже, така матриця завжди є узгодженою. Але не всі матриці порівняння є узгодженими. Справді, беручи до уваги, що такі матриці будуються на основі людських суджень, можна очікувати деяку міру неузгодженості, і до неї слід відноситися терпляче, якщо вона не виходить за певні «допустимі» рамки. Щоб визначити, чи є рівень узгодженості, допустимим, необхідно визначити відповідну кількісну міру для матриці порівняння $\boldsymbol{A}$. У нашому прикладі бачимо, що ідеально узгоджена матриця $\boldsymbol{A}$ породжує нормалізовану матрицю $\boldsymbol{N}$, в якій всі стовпці однакові.

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} w_1 & w_1 & \cdots & w_1 \\ w_2 & w_2 & \cdots & w_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n & w_n & \cdots & w_n \end{pmatrix}$$

Звідси випливає, що матриця порівняння $\boldsymbol{A}$ може бути отримана з матриці $\boldsymbol{N}$ шляхом поділу елементів i-того стовпця на w_i (цей процес зворотній до знаходженню матриці $\boldsymbol{N}$ з $\boldsymbol{A}$).

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Використовуючи наведене означення матриці $\boldsymbol{A}$, отримаємо

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Отже, умова узгодженості матриці ***A*** формулюється так: матриця ***A*** буде узгоджена тоді і тільки тоді, якщо

$$\boldsymbol{Aw}=n\boldsymbol{w},$$

де ***w*** – вектор-стовбець питомих ваг w_i, i=1, 2,…,n.

Якщо матриця не є узгодженою, то питома вага w_i апроксимується середнім значенням n елементів і-того рядка нормалізованої матриці ***N***. Позначивши через $\overline{w}$ розраховану оцінку (середнє значення), можна показати, що

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{w}} = n_{\max}\overline{\boldsymbol{w}},$$

де $n_{\max} \geq n$. У цьому випадку, чим ближче $n_{\max}$ до n, тим більш узгоджена є матриця порівняння ***A***.

Згідно з методом аналізу ієрархій вираховуємо *коефіцієнт узгодженості*:

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

де $CI = \dfrac{n_{\max} - n}{n-1}$ – коефіцієнт узгодженості матриці ***A***;

$RI = \dfrac{1{,}98(n-2)}{n}$ – стохастичний коефіцієнт узгодженості матриці ***A***.

Стохастичний коефіцієнт узгодженості *RI* визначається емпіричним шляхом як середнє значення коефіцієнта *CI* для великої вибірки матриць порівнянь ***A***, вибраних випадковим чином.

Коефіцієнт узгодженості *CR* використовується для перевірки узгодженості матриці ***A*** наступним чином. Якщо $CR \leq 0{,}1$, то рівень узгодженості є допустимим. У протилежному випадку, рівень неузгодженості матриці порівняння ***A*** є високим, і особі, що приймає рішення слід перевірити елементи парного порівняння a_{ij} матриці ***A*** з метою отримання більш узгодженої матриці.

Значення $n_{\max}$ розраховуємо на основі матричного рівняння $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{w}} = n_{\max}\overline{\boldsymbol{w}}$. При цьому i-те рівняння цієї системи має вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{w}_j = n_{\max}\overline{w}_i, \quad i = 1,2,...,n.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i = 1 \ (i = 1,2,...,n),$ то легко перевірити, що

$$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{w}_j) = n_{\max}\sum_{i=1}^{n}\overline{w}_i = n_{\max}, \quad i = 1,2,...,n.$$

А це означає, що величину $n_{\max}$ можна визначити шляхом обчислення елементів вектор-стовпця $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{w}}$ з подальшим додаванням його елементів.

Стосовно нашого прикладу матриця $\boldsymbol{A_M}$ є неузгодженою, оскільки стовпці матриці $\boldsymbol{N_M}$ – неоднакові. Дослідимо узгодженість матриці $\boldsymbol{A_M}$. Розрахуємо значення $n_{\max}$. Оскільки $\overline{w}_1 = 0{,}129, \quad \overline{w}_2 = 0{,}277, \quad \overline{w}_3 = 0{,}594,$ то

$$\boldsymbol{A_M}\overline{\boldsymbol{w}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}129 \\ 0{,}277 \\ 0{,}594 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3863 \\ 0{,}8320 \\ 1{,}7930 \end{pmatrix}.$$

Тоді $n_{\max}$ = 0,3863+0,832+1,793=3,0113.

Для n=3 маємо,

$$CI = \frac{n_{\max} - n}{n-1} = \frac{3{,}0113 - 3}{3-1} = 0{,}00565;$$

$$RI = \frac{1{,}98(n-2)}{n} = \frac{1{,}98 \cdot (3-2)}{3} = 0{,}66;$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0{,}00565}{0{,}66} = 0{,}00856.$$

Оскільки CR=0,00856<0,1, то рівень узгодженості матриці $\boldsymbol{A_M}$ є допустимим.

5. Задача стохастичного програмування – задача прийняття рішень в умовах невизначеності. У таких задачах вхідна інформація задається у вигляді матриці, стрічки якої відповідають можливим альтернативам, а стовпці – станам системи.

Кожній альтернативі та кожному стану системи відповідає результат (наслідок) f, який визначає виграш Z (або втрати V) при виборі даної альтернативи й реалізації даного стану. Отже, якщо a_i представляє альтернативу i ($i = \overline{1,n}$), S_j представляє можливий стан j ($j = \overline{1,m}$), то f описує відповідний результат. У загальному випадку f може бути неперервною функцією аргументів a_i та S_j та відображати виграш або втрати: $f = Z(a_i, S_j)$ або $f = V(a_i, S_j)$.

У дискретному випадку вказані дані представляються матрицею:

	S_1	…	S_m
a_1	$f(a_1, S_1)$	…	$f(a_1, S_m)$
⋮	⋮	⋮	⋮
a_m	$f(a_n, S_1)$	…	$f(a_n, S_m)$

Така форма представлення в подальшому буде використовуватися при розгляді критеріїв прийняття рішень в умовах невизначеності.

Критерій Лапласа. Використовується при умові, коли ймовірності можливих станів систем невідомі, тобто в умовах повної невизначеності. Даний критерій базується на використанні принципу недостатнього обґрунтування, який стверджує, що стани системи S_1, S_2,... S_m мають рівні ймовірності. Враховуючи вище сказане, початкову задачу можна розглядати як задачу прийняття рішень в умовах ризику, коли вибирається альтернатива a_i, яка дає найбільш очікуваний виграш R_1 (коли задана функція прибутку) або найменший очікуваний програш R_1 (коли задана функція витрат).

$$R_л = \min_i \{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} V(a_i, S_j)\} \quad , \tag{11.10}$$

або

$$R_л = \max_i \{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Z(a_i, S_j)\} \tag{11.12}$$

де $\frac{1}{m}$ – імовірність реалізації стану системи S_j ($j = \overline{1,m}$).

Критерій Вальда. Даний критерій є найбільш обережним, оскільки ґрунтується на виборі найкращої альтернативи з усіх найгірш можливих. У зв'язку з цим критерій Вальда часто називають максимінним (мінімаксним):

$$R_B = \max_i \min_j \{Z(a_i, S_j)\} \tag{11.13}$$

$$R_B = \min_i \max_j \{V(a_i, S_j)\} \tag{11.14}$$

Критерій Севіджа. Ґрунтується на принципі мінімакса наслідків прийнятого помилкового рішення і старається мінімізувати втрачену вигоду. Його зміст полягає у формуванні нової матриці втрат $W(a_i, S_j)$ з допомогою наступних формул:

$$W(a_i, S_j) = \max_k \{Z(a_k, S_j)\} - Z(a_i, S_j) \tag{11.15}$$

або

$$W(a_i, S_j) = V(a_i, S_j) - \min_k \{V(a_k, S_j)\} \tag{11.16}$$

Функція $W(a_i, S_j)$ в обох випадках визначає втрати. Тому до $W(a_i, S_j)$ слід використовувати тільки мінімаксний критерій. Таким чином, формула для вибору оптимальної альтернативи з допомогою критерію Севіджа набуває вигляду:

$$R_C = \min_i \max_j \{W(a_i, S_j)\}. \qquad (11.17)$$

Критерій Гурвіца (критерій оптимізму-песимізму). Встановлює баланс між випадками крайнього оптимізму й крайнього песимізму, порівнюючи обидві альтернативи з допомогою відповідних коефіцієнтів α та $(1-\alpha)$, де $0 \le \alpha \le 1$.

Параметр α – показник оптимізму (ступінь впевненості): при α=1, критерій дуже оптимістичний; при α=0 – дуже песимістичний. Значення α $(0 \le \alpha \le 1)$ може визначитися в залежності від характеру особи, яка приймає рішення, тобто, що їй більш характерно: песимізм або оптимізм. Чим складніша господарська ситуація, чим більше в ній хоче підстрахуватись ОПР, тим ближче до нуля вибирається α. При відсутності інформації про явно виражений характер особи α приймається рівним **0,5**.

Основна література

1. Матвієнко В. Я. Прогностика: прогнозування соціальних та економічних процесів. Теорія, методика, практика. – К.: Українські пропілеї, 2000. – 484 с.
2. Плотинский Ю. М. Модели социальных процессов: Учебное пособие для высших учебных заведений. – М.: Логос, 2001. – 296 с.
3. Райцин В. Я. Моделирование социальных процессов: Учебник. – М.: Экзамен, 2005.–189 с.
4. Циба В. Т. Математичні основи соціологічних досліджень: кваліметричний підхід. – К.: МАУП, 2002. – 248 с.

Додаткова література

5. Бутник О. М. Динамічні моделі розвитку соціально-економічних систем при інвестиційних процесах // Економіка та держава, 2006. – №11. – С. 19–20.
6. Девятко И. Ф. Методы социологического исследования. – М.: Книжный дом, 2002. – 296 с.
7. Єрьоменко В. О., Шинкарик М. І., Бабій Р. М., Процик А. І. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики. – Тернопіль: Економічна думка, 2006. – 320 с.
8. Ляшенко І. М., Коробова М. В., Столяр А. М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів: Навч. пос. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2006. – 304 с.
9. Математическое моделирование социальных процессов /Под ред. В.И.Добренькова, А.А.Самарского. М., 1999.
10. Паніотто В.І., Максименко В.С., Марченко Н.М. Статистичний аналіз соціологічних даних. - К.: Вид.дім "КМ Академія", 2004.
11. Татарова Г.Г. Математическое моделирование социальных процессов в социологическом образовании. -М., 2004
12. Цыгичко В. Н. Прогнозирование социально-экономических процессов. – М.: КомКнига, 2007. – 240 с.

ЗМІСТ

Вступ…… 3

Тема 1. Соціальні процеси: суть та особливості…… 4

Тема 2. Основні аспекти моделювання соціальних процесів 9

Тема 3. Основи когнітивного підходу……... 22

Тема 4. Моделювання демографічних процесів…….. 33

Тема 5. Моделі життєвого циклу……... 38

Тема 6. Статистична основа моделювання соціальних процесів ……. 42

Тема 7. Соціально-математична модель …… 50

Тема 8. Використання регресійного аналізу для побудови соціометричної моделі…… 60

Тема 9. Коефіцієнти зв'язку……... 83

Тема 10. Оптимальний підхід та оптимізаційні моделі у вивченні соціальних процесів…….. 98

Тема 11. Теоретико-ігровий підхід у моделюванні соціальних процесів……. 112

Основна література…….. 129

Додаткова література…… 129

Зміст…….. 130

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Світлана Григорівна Хома-Могильська

Надія Григорівна Хома

МОДЕЛІ СОЦІАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ

Навчальний посібник

Підписано до друку 29.08.16 р.
Папір офсетний. Формат 60х84 1/16 .
Гарнітура Times New Roman.
Умов. друк. арк. 7,2.
Обл.-вид. арк. 8,4.
Наклад 300 прим.

Віддруковано з готових діапозитивів в СМП «Тайп»
46006, м. Тернопіль, вул. Чернівецька, 44 б,
тел. (0352) 52-00-75; (0352) 52-61-61