

Хома-Могильська С.Г.¹, к.ф.-м.н, Хохлова Л.Г.², к.ф.-м.н., доцент

¹Тернопільський національний економічний університет, м. Тернопіль

Кафедра економіко-математичних методів, ст. викладач

²Тернопільський національний педагогічний університет ім. Володимира Гнатюка

Кафедра математичного аналізу, доцент

ПОБУДОВА ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Щоб встановити умови існування єдиного розв'язку лінійної крайової періодичної задачі

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, t + \omega) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (2)$$

у припущенні, що $g(x, t + \omega) = g(x, t)$, будемо шукати розв'язок цієї задачі у вигляді

$$u(x, t) = u^0(x, t) + \tilde{u}(x, t), \quad (3)$$

де $u^0(x, t)$ – розв'язок однорідної періодичної задачі

$$u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (4)$$

$$u^0(x, t + \omega) = u^0(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (5)$$

$\tilde{u}(x, t)$ – частинний розв'язок рівняння (1), такий, що $\tilde{u}(x, t + \omega) = \tilde{u}(x, t)$.

За допомогою методу Фур'є [1] встановлено, що загальним розв'язком однорідної періодичної задачі (4), (5) є функція

$$\begin{aligned} u^0(x, t) = & Ax + B + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k^1 \cos v_k x + A_k^2 \sin v_k x \right) \cos v_k t + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k^3 \cos v_k x + A_k^4 \sin v_k x \right) \sin v_k t, \end{aligned} \quad (6)$$

де $v_k = \frac{2\pi k}{\omega}$, A , B , A_k^1 , A_k^2 , A_k^3 , A_k^4 , $k \in \mathbf{N}$, – довільні сталі.

Припустимо тепер, що відомий частинний розв'язок $\tilde{u}(x, t)$ неоднорідного рівняння (1) такий, що $\tilde{u}(x, t + \omega) = \tilde{u}(x, t)$.

Тоді розв'язок (3) задачі (1), (2) запишеться у вигляді

$$u(x,t) = Ax + B + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^1 \cos v_k x + A_k^2 \sin v_k x) \cos v_k t + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^3 \cos v_k x + A_k^4 \sin v_k x) \sin v_k t + \tilde{u}(x,t), \quad (7)$$

де $v_k = \frac{2\pi k}{\omega}$, A , B , A_k^i , $i=1, 2, 3, 4$, $k \in \mathbf{N}$, – довільні сталі.

Очевидно, що розв'язок (7) буде єдиним формальним розв'язком крайової періодичної задачі (1), (2), якщо при врахуванні крайових умов $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ система [2]

$$B + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^1 \cos v_k t + A_k^3 \sin v_k t) + \tilde{u}(0,t) = 0, \\ A\pi + B + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^1 \cos v_k \pi + A_k^2 \sin v_k \pi) \cos v_k t + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^3 \cos v_k \pi + A_k^4 \sin v_k \pi) \sin v_k t + \tilde{u}(\pi,t) = 0 \quad (8)$$

відносно нескінченного числа невідомих коефіцієнтів A , B , A_k^i , $i=1, 2, 3, 4$, $k \in \mathbf{N}$, матиме єдиний розв'язок. Ця система є специфічною у тому розумінні, що вона набуває різного вигляду залежно від значення періоду ω , а тому загального методу її розв'язання не існує. Досліджувати систему (8) необхідно для кожного випадку окремо. Крім цього, проводити дослідження ми зможемо, якщо буде відомий частинний розв'язок $\tilde{u}(x,t)$ періодичної задачі (1), (2).

Література

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
2. Митропольський Ю.О. Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку / Ю.О Митропольський, С.Г. Хома-Могильська // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, № 7. – С. 912-921.