

УДК 536.2

Б. Окрепкий, канд. фіз.-мат. наук; М. Шелестовська, канд. техн. наук

Тернопільський національний економічний університет

ТИСК ПРУЖНОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО КРУГОВОГО ШТАМПА НА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИЙ ПІВПРОСТІР ПРИ НЕІДЕАЛЬНОМУ ТЕПЛОВОМУ КОНТАКТІ

Резюме. Побудовано розв'язок осесиметричної контактної задачі термопружності про тиск гарячого циліндричного кругового трансверсально-ізотропного штампа на пружний трансверсально-ізотропний півпростір із урахуванням неідеального теплового контакту між штампом і півпростором. Одержано формули для визначення температурного поля і нормального напруження. Досліджено вплив контактної провідності й коефіцієнтів анізотропії матеріалів на розподіл температурних полів і нормального напруження у зоні контакту двох тіл.

Ключові слова: штамп, анізотропія матеріалів, неідеальний тепловий контакт, трансверсально-ізотропний, термопружність, контактні напруження.

B. Okrepkiy, M. Shelestovska

THE PRESSURE OF THE CYLINDER CIRCULAR PUNCH ON THE TRANSVERSAL-ISOTROPIC SEMI-SPACE UNDER NON-IDEAL HEAT CONTACT

The summary. Solution of the axis-symmetric contact task of thermo-elasticity of the hot cylinder circular punch stress on the elastic transversal-isotropic semi-space taking into account non-ideal heat contact between punch and semi-space is built. Formulas for determination of the temperature field and normal stress in the contact area are obtained. The effect of the contact elasticity on the temperature and normal stress distribution is investigated. Investigation was made on the influence of the contact conductivity and coefficients of anisotropy on distributing of the temperature fields and normal stress in the area of contact of two bodies.

Key words: punch, anisotropy materials, non-ideal contact, transversal-isotropic, thermo-elasticity, contact stresses.

Постановка проблеми. Визначення контактних деформацій і напружень з урахуванням температурних факторів і анізотропії матеріалів є важливим завданням для дослідження міцності деталей машин і елементів конструкцій у місцях їхньої взаємодії, при розрахунку конструкції на пружній основі для раціонального використання конструкції і несучої здатності основи.

Аналіз останніх досліджень. У багатьох працях [1-3] досліджено вплив температурних факторів на характер взаємодії тіл. Зокрема, в статті [3] розв'язано осесиметричну контактну задачу термопружності про тиск гарячого кругового циліндричного штампа з плоскою основою на пружний ізотропний півпростір із урахуванням неідеального теплового контакту між штампом і півпростором. Проте недостатньо вивчено вплив умов неідеального теплового контакту для анізотропних тіл на величину і характер розподілу температурних полів і нормальних напружень у зоні контакту.

Мета роботи. Побудувати розв'язок осесиметричної контактної задачі термопружності про тиск циліндричного кругового трансверсально-ізотропного штампа з плоскою основою на трансверсально-ізотропний півпростір при неідеальному тепловому контакті й знайти формули для визначення температури і нормальних

напружень. Дослідити вплив контактної провідності й коефіцієнтів анізотропії на розподіл температурних полів і нормальних напружень у зоні контакту двох тіл.

Постановка задачі. Нехай круговий циліндричний штамп довжиною L і радіусом R із плоскою основою втискується силою P у пружний півпростір. Матеріали тіл вважаємо трансверсально-ізотропними.

Поверхня півпростору зовні площадки контакту вільна від зовнішніх зусиль. На площадці контакту дотичні напруження $\tau_{rz} = 0$. Тепловий контакт між тілами неідеальний. На вільному торці циліндра задана постійна температура T_0 , бічна поверхня циліндра теплоізолювана, а границя півпростору підтримується при нульовій температурі.

При заданих припущеннях необхідно визначити контактні напруження під штампом і температурні поля у зоні контакту.

Для розв'язування задачі введемо циліндричну систему координат r, θ, z із площиною $z = 0$, яка співпадає з поверхнею півпростору й віссю Oz , спрямованою всередину штампа по його осі симетрії.

Усі величини (напруження, переміщення, температура, пружні постійні коефіцієнти теплопровідності й лінійного температурного розширення), які відносяться до півпростору, позначимо верхнім індексом (1), аналогічні величини для циліндричної області записуємо без верхніх індексів. Таким чином, запропоновану задачу розв'язуємо за таких граничних умов:

$$\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z}, \quad \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = h_0 (T - T^1) \quad (z = 0, 0 \leq r \leq R), \quad (1)$$

$$T^1 = 0 \quad (z = 0, R \leq r < \infty), \quad (2)$$

$$T = T_0 \quad (z = L, 0 \leq r \leq R), \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (0 \leq z \leq L, r = R), \quad (4)$$

$$u_z^1 = -\varepsilon \quad (z = 0, 0 \leq r \leq R), \quad (5)$$

$$\sigma_z^1 = 0 \quad (z = 0, R \leq r < \infty), \quad (6)$$

$$\tau_{rz}^1 = 0 \quad (z = 0, 0 \leq r < \infty). \quad (7)$$

λ_z, λ_z^1 – коефіцієнти теплопровідності, ε – величина вертикального переміщення штампа, h_0 – контактна провідність.

Розв'язування крайових задач для рівняння теплопровідності й термопружності. Відомо [4], що у випадку трансверсально-ізотропних тіл температурне поле задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (8)$$

Напруження і переміщення визначаємо через термопружні потенціали φ_1 і φ_2 згідно з формулами

$$u_z^{(r)} = -a_1 \left(s_2^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right), \quad \tau_{rz}^{(r)} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z}, \quad \sigma_z^{(r)} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}. \quad (9)$$

Функції φ_1 і φ_2 задовольняють систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \nu_2^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = \frac{1}{a_2^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - a_3 T \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \nu_1^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = a_4 T.$$

У співвідношеннях (8-10) λ^2 – відношення коефіцієнтів теплопровідності в напрямку осі Oz і перпендикулярному до нього; ν_i^2 , s_i^2 – корені характеристичних рівнянь [4, 5], які залежать від модулів пружності A_{ij} [6]; a_i ($i = \overline{1, 4}$) – величини, які залежать від коефіцієнтів деформацій a_{ij} і коефіцієнтів лінійного температурного розширення α_T і β_T (у напрямку осі Oz і відповідно в площині ізотропії) [4].

Для визначення температурного поля у півпросторі введемо трансформанту Ганкеля функції $T^1(r, z)$ нульового порядку

$$\bar{T}^1(\xi, z) = \int_0^\infty r T^1(r, z) J_0(\xi r) dr, \quad (11)$$

за допомогою якої, згідно з рівнянням (8), знаходимо $T^1(\rho, \zeta)$ через довільну функцію $\varphi(\eta)$

$$T^1(\rho, \zeta) = \int_0^\infty \varphi(\eta) e^{\frac{\eta \zeta}{\lambda^1}} J_0(\eta \rho) d\eta, \quad (12)$$

де $J_0(\eta \rho)$ – функція Бесселя першого роду дійсного аргументу; $\rho = \frac{r}{R}$; $\zeta = \frac{z}{R}$.

Температурне поле в циліндрі знаходимо методом Фур'є. Загальний розвиток матиме вигляд

$$T(r, z) = A_0 + B_0 z + D_0 (\lambda^2 r^2 - r z^2) + \sum_{k=1}^\infty J_0(\beta_k r) \left(A_k \operatorname{sh} \frac{\beta_k z}{\lambda} + B_k \operatorname{ch} \frac{\beta_k z}{\lambda} \right) + \sum_{k=1}^\infty I_0(\lambda \gamma_k r) (C_k \sin \gamma_k z + D_k \cos \gamma_k z), \quad (13)$$

де A_k , B_k , C_k , D_k – довільні постійні; $I_0(\lambda \gamma_k r)$ – функції Бесселя I-го роду уявного аргументу; β_k , γ_k – власні числа, які визначаємо із граничних умов.

По відомих температурних полях температурні потенціали φ_1 і φ_2 визначаємо із системи (10) таким способом. Підставляючи значення T^1 у друге рівняння (10), знаходимо φ_2 , а знаючи φ_2 і T^1 , із першого рівняння визначаємо φ_1 . При цьому для загального розв'язку достатньо знайти часткові розв'язки φ_1 і φ_2 рівнянь (10). Не зупиняючись на викладках, запишемо кінцевий результат для півпростору

$$\varphi_1(\rho, \zeta) = h_1^1 \int_0^\infty \frac{1}{\eta^2} \varphi(\eta) e^{\frac{\eta \zeta}{\lambda^1}} J_0(\eta \rho) d\eta, \quad \varphi_2(\rho, \zeta) = \frac{a_4 (\lambda^1)^2 \varphi_1(\rho, \zeta)}{\left[(\nu_1^1)^2 - (\lambda^1)^2 \right] h_1^1}, \quad (14)$$

$$h_1^1 = \left\{ a_4^1 - a_3^1 \left[(\nu_1^1)^2 - (\lambda^1)^2 \right] \right\} \cdot \left\{ a_2^1 \left[(\nu_2^1)^2 - (\lambda^1)^2 \right] \left[(\nu_1^1)^2 - (\lambda^1)^2 \right]^{-1} \right\}.$$

Компоненти температурних напружень і переміщень обчислюємо за формулами (9).

Загальний напружено-деформований стан унаслідок дії температурних і механічних факторів одержуємо, додавши до компонент напружень і переміщень (9)

компоненти $u_z^1(\phi)$, $\sigma_z^1(\phi)$, $\tau_{rz}^1(\phi)$, знайдені через функції напружень ϕ_1 і ϕ_2 , тобто $u_z^1 = u_z^{r1}(\phi) + u_z^1(\phi)$ і т.д.

Вирази для компонент переміщень і напружень та рівняння для функцій напружень мають вигляд

$$u_z^1(\phi) = \frac{\partial}{\partial z} (k_1^1 \phi_1 + k_2^1 \phi_2),$$

$$\sigma_z^1(\phi) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \left[k_1^1 A_{33}^1 - (\nu_1^1)^2 A_{13}^1 \right] \phi_1 + \left[k_2^1 A_{33}^1 - (\nu_2^1)^2 A_{13}^1 \right] \phi_2 \right\}, \quad (15)$$

$$\tau_{rz}^1(\phi) = A_{44}^1 \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left[(1 + k_1^1) \phi_1 + (1 + k_2^1) \phi_2 \right],$$

$$\left(\nabla_1^2 + (\nu_1^1)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_i = 0, \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad (i=1, 2) \quad (16)$$

де k_i^1 , ν_i^{12} ($i=1, 2$) – корені характеристичного рівняння [5].

Таким чином, для визначення переміщення і напружень у трансверсально-ізотропному півпросторі маємо такі співвідношення [1]:

$$u_z^1 = -a_1^1 \lambda^1 h_2^1 R \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \varphi(\eta) e^{\frac{\eta \zeta}{\lambda^1}} J_0(\eta \rho) d\eta + \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \left[\frac{k_1^1}{\nu_1^1} e^{\frac{\eta \zeta}{\nu_1^1}} F_1^*(\eta) + \frac{k_2^1}{\nu_2^1} e^{\frac{\eta \zeta}{\nu_2^1}} F_2^*(\eta) \right] J_0(\eta \rho) d\eta,$$

$$\sigma_z^1 = -(\lambda^1)^2 h_1^1 \int_0^\infty \varphi(\eta) e^{\frac{\eta \zeta}{\lambda^1}} J_0(\eta \rho) d\eta + \frac{1}{R} \int_0^\infty \left[\frac{d_1^1}{(\nu_1^1)^2} e^{\frac{\eta \zeta}{\nu_1^1}} F_1^*(\eta) + \frac{d_2^1}{(\nu_2^1)^2} e^{\frac{\eta \zeta}{\nu_2^1}} F_2^*(\eta) \right] J_0(\eta \rho) d\eta,$$

$$r_{rz}^1 = \lambda^1 h_1^1 \int_0^\infty \varphi(\eta) e^{\frac{\eta \zeta}{\lambda^1}} J_1(\eta \rho) d\eta - \frac{A_{44}^1}{R} \int_0^\infty \left[\frac{1 + k_1^1}{\nu_1^1} e^{\frac{\eta \zeta}{\nu_1^1}} F_1^*(\eta) + \frac{1 + k_2^1}{\nu_2^1} e^{\frac{\eta \zeta}{\nu_2^1}} F_2^*(\eta) \right] J_1(\eta \rho) d\eta, \quad (17)$$

де $\varphi(\eta)$, $F_1^*(\eta)$, $F_2^*(\eta)$ – невідомі функції; $h_2^1 = s_2^2 h_1^1 - a_4^1 \left[(\nu_1^1)^2 - (\lambda^1)^2 \right]$, s_i^2 – корені рівняння [4, 5]:

$$A_{44}^1 S^4 - (A_{11}^1 - A_{12}^1) S^2 + \frac{(A_{11}^1 - A_{12}^1)^2 (A_{13}^1 + A_{44}^1)}{A_{11}^1 A_{33}^1 - (A_{13}^1)^2} = 0.$$

$$a_1^1 = a_{11}^1 - a_{12}^1, \quad a_2^1 = \frac{a_{11}^1 a_{33}^1 - (a_{13}^1)^2}{a_1^1 a_{11}^1}, \quad a_3^1 = \frac{\beta_{T^1} a_{11}^1 - \alpha_{T^1} a_{13}^1}{a_1^1 a_{11}^1}, \quad a_4^1 = a_{31}^1 (\nu_1^1)^2 - \frac{\alpha_{T^1}}{a_{11}^1}.$$

Для задоволення граничної умови (4) у формулі (13) необхідно взяти $C_k = 0$, $D_k = 0$ ($k = \overline{0, \infty}$). Із умови (4) одержимо, що $\beta_k = \frac{\mu_k}{R}$, де μ_k – корені рівняння $J_1(\mu_k) = 0$.

Гранична умова (3), з урахуванням ортогональності функцій Бесселя, призводить до співвідношень між постійними A_n і B_n , у результаті цього температурне поле в циліндрі зобразимо через одну нескінченну систему постійних $C_k^{(1)}$ ($k = \overline{0, \infty}$) за формулою

$$T(\rho, \zeta) = T_0 \left\{ 1 + \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z^1 \lambda} (\zeta - l) C_0^{(1)} - \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z^1 \lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{sh \frac{\mu_k (l - \zeta)}{\lambda}}{ch \frac{\mu_k l}{\lambda}} J_0(\mu_k \rho) C_k^{(1)} \right\}, \quad l = \frac{L}{R}, \quad (18)$$

$$\text{де } C_0^{(1)} T_0 = \frac{\lambda^1}{\lambda} \frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} A_0 R, \quad C_k T_0 = \frac{\lambda^1}{\lambda} \frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} A_k \quad (k = \overline{1, \infty}).$$

Задовольнивши першу граничну умову (1) і умову (2), одержимо парні інтегральні рівняння відносно до функції $\varphi(\eta)$:

$$\int_0^\infty \eta \varphi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = T_0 \left(C_0^{(1)} + \sum_{k=1}^\infty \mu_k J_0(\mu_k \rho) C_k^{(1)} \right) \quad (\rho < 1), \quad (19)$$

$$\int_0^\infty \varphi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad (\rho > 1), \quad (20)$$

розв'язок яких має вигляд

$$\varphi(\eta) = \frac{2}{\pi} T_0 \left[C_0^{(1)} \frac{1}{\eta} \left(\frac{\sin \eta}{\eta} - \cos \eta \right) + \sum_{k=1}^\infty \mu_k C_k^{(1)} \int_0^1 \sin \mu_k y \sin \eta y dy \right]. \quad (21)$$

Другу умову (1), із урахуванням (12) і (18), запишемо так:

$$\int_0^\infty \varphi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = T_0 \left\{ 1 - \left(\frac{\lambda_z^1 l}{\lambda_z \lambda} + \frac{\lambda_z^1}{\lambda h_0 R} \right) C_0^{(1)} - \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \frac{\lambda}{\lambda^1} \text{th} \mu_k l + \frac{\lambda_z^1 \mu_k}{h_0 R \lambda^1} \right) C_k J_0(\mu_k \rho) \right\} \quad (\rho < 1). \quad (22)$$

Підставивши (21) в рівняння (22), отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} T_0 C_0^{(1)} \int_0^\infty \frac{J_0(\eta \rho)}{\eta} \left(\frac{\sin \eta}{\eta} - \cos \eta \right) d\eta + \frac{2}{\pi} T_0 \sum_{k=1}^\infty \mu_k C_k^{(1)} \int_0^\infty J_0(\eta \rho) d\eta \int_0^1 \sin \eta y \sin \mu_k y dy = \\ & = T_0 \left\{ 1 - \left(\frac{\lambda_z^1 l}{\lambda_z \lambda} + \frac{\lambda_z^1}{\lambda h_0 R} \right) C_0^{(1)} - \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{\lambda_z^1 \lambda}{\lambda_z \lambda^1} \text{th} \mu_k l + \frac{\lambda_z^1}{h_0 R \lambda^1} \mu_k \right) C_k^{(1)} J_0(\mu_k \rho) \right\} \quad (\rho < 1). \end{aligned} \quad (23)$$

Помноживши обидві частини рівності (23) на ρ та $\rho J_0(\mu_n \rho)$ і проінтегрувавши в межах від 0 до 1, з урахуванням ортогональності функцій Бесселя, одержимо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $C_k^{(1)}$:

$$\alpha_{n,n}^{(1)} C_n^{(1)} + \sum_{k=0}^\infty \alpha_{n,k}^{(1)} C_k^{(1)} = \gamma_n^{(1)} \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (24)$$

до

$$\begin{aligned} \alpha_{0,0}^{(1)} &= \frac{1}{2} \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z \lambda} \left(l + \frac{1}{h_0^1} \right) + \frac{2}{3\pi}, & \alpha_{0,k}^{(1)} &= \frac{2}{\pi \mu_k} \left(\frac{\sin \mu_k}{\mu_k} - \cos \mu_k \right), & \gamma_0^{(1)} &= \frac{1}{2}, \\ \alpha_{n,0}^{(1)} &= \frac{2}{\pi \mu_n^2} \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} - \cos \mu_n \right), & \alpha_{n,k}^{(1)} &= \frac{2}{\pi} \mu_k \frac{\mu_k \sin \mu_n \cos \mu_k - \mu_n \sin \mu_k \cos \mu_n}{\mu_n^2 - \mu_k^2}, \\ \alpha_{n,k}^{(1)} &= \begin{cases} \alpha_{n,k}, & k \neq n, \\ \alpha_{n,k} + \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \frac{\lambda}{\lambda^1} \left(\text{th} \mu_n l + \frac{\mu_n}{h_0^{(1)}} \right) \frac{J_0^2(\mu_n)}{2}, & k = n, \end{cases} & \gamma_n^{(1)} &= 0 \quad (n = 1, 2, \dots), & h_0^{(1)} &= \frac{h_0 R}{\lambda_z}. \end{aligned}$$

Температуру в півпросторі, згідно з (12), (21), обчислюємо за формулою

$$\begin{aligned} T^1(\rho, \zeta) &= \frac{2}{\pi} T_0 \left[C_0^{(1)} \int_0^\infty e^{\frac{\eta \zeta}{\lambda^1}} \frac{1}{\eta} \left(\frac{\sin \eta}{\eta} - \cos \eta \right) J_0(\eta \rho) d\eta + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^\infty \mu_k C_k^{(1)} \int_0^1 \sin \mu_k y dy \int_0^\infty e^{\frac{\eta \zeta}{\lambda^1}} J_0(\eta \rho) \sin \eta y dy \right] \quad (0 \leq \rho \leq \infty). \end{aligned} \quad (25)$$

Задовольнивши граничну умову (7) для напруження $\sigma_z^1(\rho, 0)$ і переміщення $u_z^1(\rho, 0)$, на поверхні півпростору маємо формули:

$$u_z^1(\rho, 0) = \frac{1}{\Delta_1} \int_0^\infty \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta - \frac{\alpha_{rr} \Delta_2}{\Delta_1} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \varphi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta,$$

$$\sigma_z^1(\rho) = R \int_0^\infty \eta \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta, \quad (26)$$

де

$$\Delta_1 = \left[\frac{d_1^1}{\nu_1^1} (1 + k_2^1) - \frac{d_2^1}{\nu_2^1} (1 + k_1^1) \right] \frac{1}{k_2^1 - k_1^1}, \quad \Delta_2 = \left[\frac{d_1^1}{\nu_1^1} (1 + k_2^1) a_1^1 h_2^1 - \frac{h_1^1 \nu_1^1 \nu_2^1 k_2^1}{A_{44}^1} \right] -$$

$$- \frac{d_2^1}{\nu_2^1} \left[(1 + k_1^1) a_1^1 h_2^1 - \frac{h_1^1 \nu_1^1 \nu_2^1 k_1^1}{A_{44}^1} \right] - (k_2^1 - k_1^1) \left\{ \frac{\lambda^1}{\alpha_{T^1} (k_2^1 - k_1^1)} \right\},$$

$$d_i^1 = k_i^1 A_{33}^1 - (\nu_i^1)^2 A_{13} \quad (i = 1, 2),$$

$$\frac{d_1^1}{(\nu_1^1)^2} F_1^*(\eta) + \frac{d_2^1}{(\nu_2^1)^2} F_2^*(\eta) - (\lambda^1)^2 h_1^1 R \varphi(\eta) = R_\eta \phi(\eta),$$

$$\frac{1 + k_1^1}{\nu_1^1} F_1^*(\eta) + \frac{1 + k_2^1}{\nu_2^1} F_2^*(\eta) = \frac{\lambda^1 h_1^1 R}{A_{44}^1} \varphi(\eta).$$

Вимагаючи виконання граничних умов (5), (6), прийдемо до системи інтегральних рівнянь відносно функцій $\phi(\eta)$ і $\varphi(\eta)$:

$$\int_0^\infty \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = -\frac{\varepsilon}{R} \Delta_1 - \Delta_2 \alpha_{T^1} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} J_0(\eta \rho) \varphi(\eta) d\eta \quad (\rho < 1), \quad (28)$$

$$\int_0^\infty \eta \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad (\rho > 1). \quad (29)$$

Якщо ввести функцію $f(t)$ співвідношенням

$$\phi(\eta) = \Delta_1 \int_0^1 f(t) \cos \eta t dt, \quad (30)$$

то рівняння (29) задовольняється тотожно, а рівняння (28) зводиться до інтегрального рівняння Абеля

$$\int_0^\rho \frac{f(t) dt}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} = g(\rho), \quad (31)$$

розв'язок якого, відповідно до [7], визначаємо за формулою

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho g(\rho) d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}, \quad (32)$$

де

$$g(\rho) = -\frac{\varepsilon}{R} - \frac{\Delta_2 \alpha_{T^1}}{\Delta_1} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \varphi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta. \quad (33)$$

Підставивши вираз (33) у формулу (32), одержимо

$$f(t) = -\frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon}{R} - \frac{2}{\pi} \frac{\Delta_2 \alpha_{T^1}}{\Delta_1} \int_0^\infty \frac{\cos \eta t}{\eta} \varphi(\eta) d\eta \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (34)$$

Контактні напруження під штампом $\sigma_z^1(\rho, 0)$, з урахуванням (30), визначаємо за формулою

$$\sigma_z^1(\rho, 0) = \Delta_1 \left(\frac{f(1)}{\sqrt{1 - \rho^2}} - \int_\rho^1 \frac{f'(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \right) \quad (\rho < 1). \quad (35)$$

Використовуючи умову рівноваги штамп

$$P = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho \sigma_z^{(1)}(\rho) d\rho$$

та формулу (35), рівняння (34) зведемо до:

$$f(t) + \frac{2}{\pi} \frac{\Delta_2 \alpha_{T^1}}{\Delta_1} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) \varphi(\eta) d\eta = -\frac{P}{2\pi R^2 \Delta_1} \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (36)$$

Підставивши функцію $\varphi(\eta)$ (21) у рівняння (36), одержимо:

$$f(t) + \frac{4}{\pi} T_0 \alpha_{T^1} \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \left\{ C_0^{(1)} \int_0^\infty \frac{1}{\eta^2} \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) \left(\frac{\sin \eta}{\eta} - \cos \eta \right) d\eta + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^\infty C_k^{(1)} \mu_k \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta \int_0^1 \sin \mu_k y \sin \eta y dy \right\} = -\frac{P}{2\pi R^2 \Delta_1} \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (37)$$

Подамо функцію $f(t)$ у вигляді

$$f(t) = \sum_{k=0}^N (2k+1) P_k (1-2t^2) a_k, \quad (38)$$

де a_k – невідомі коефіцієнти; $P_k (1-2t^2)$ – функція Лежандра. Тоді рівняння (37), із урахуванням ортогональності функцій Лежандра $P_k (1-2t^2)$ на інтервалі $(0, 1)$ і позначень

$$a_k = -\frac{P}{2\pi R^2 \Delta_1} \cdot X_k + \alpha_{T^1} \frac{T_0 \Delta_2}{\Delta_1} \cdot Y_k \quad (k = \overline{0, N}), \quad (39)$$

зводяться до вигляду

$$X_0 = 1; \quad X_k = 0 \quad (k = \overline{1, N}); \\ Y_n = \delta_n \quad (n = \overline{0, N}), \quad (40)$$

де

$$\delta_n = -\frac{4}{\pi^2} \left(i_{n,0} C_0^{(1)} + \sum_{k=1}^\infty \mu_k i_{n,k} C_k^{(1)} \right) \quad (n = \overline{0, N}), \\ i_{0,0} = \int_0^\infty \frac{1}{\eta^2} \tau_0(\eta) \left(\frac{\sin \eta}{\eta} - \cos \eta \right) d\eta, \quad i_{n,0} = \int_0^\infty \frac{1}{\eta^2} \tau_n(\eta) \left(\frac{\sin \eta}{\eta} - \cos \eta \right) d\eta, \\ i_{n,k} = \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \tau_n(\eta) d\eta \int_0^1 \sin \mu_k y \sin \eta y dy, \quad \tau_0(\eta) = \frac{1}{\eta} \left(\frac{\cos \eta}{\eta} - \frac{1}{\eta} + \frac{1}{2} \sin \eta \right), \\ \tau_n(\eta) = \frac{1}{2} \eta \gamma_n \left(\frac{\eta}{2} \right) \left[\gamma_{n-1} \left(\frac{\eta}{2} \right) - \gamma_{n+1} \left(\frac{\eta}{2} \right) \right] - \frac{(-1)^n}{2\Gamma(1+n)\Gamma(1-n)} \frac{\sin \eta}{\eta} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$\gamma_n(\eta)$ – сферичні функції.

Для знаходження контактних напружень під штампом, згідно з формулами (35), (38) і позначеннями (39), (40), отримаємо:

$$\sigma_z^{(1)}(\rho) = \sigma_z^{(P)}(\rho) + \sigma_z^{(T^1)}(\rho), \\ \sigma_z^{(P)}(\rho) = -\frac{P}{2\pi R^2} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \quad (\rho < 1), \quad (41)$$

$$\sigma_z^{(T^1)}(\rho) = \frac{\alpha_{T^1} T_0 \Delta_2}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[\delta_0 + \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^N (-1)^k (2k+1) T_{2k+1}(\rho) \delta_k \right] \quad (\rho < 1), \quad (42)$$

де $\sigma_z^{(P)}(\rho)$, $\sigma_z^{(T^1)}(\rho)$ – силова і температурна складові контактних напружень $\sigma_z^{(1)}(\rho)$.

Формули для визначення температури в зоні контакту двох тіл згідно з (18) і (25) матимуть такий вигляд:

а) для циліндра

$$T(\rho) = T_0 \left\{ 1 - \frac{\lambda_z^1 l}{\lambda_z \lambda} C_0^{(1)} - \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \frac{\lambda}{\lambda^1} \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k \rho) \operatorname{th} \frac{\mu_k l}{\lambda} C_k^{(1)} \right\}; \quad (43)$$

б) для півпростору

$$T^1(\rho) = \frac{2}{\pi} T_0 \left\{ C_0^{(1)} \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} \left(\frac{\sin \eta}{\eta} - \cos \eta \right) J_0(\eta \rho) d\eta + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k C_k^{(1)} \int_0^1 \sin \mu_k y dy \int_0^{\infty} J_0(\eta \rho) \sin \eta y dy \right\} \quad (0 \leq \rho < \infty). \quad (44)$$

Із наведених формул можна отримати розв'язок задачі [3] для ізотропних матеріалів.

Для цього потрібно у відповідних формулах підставити $\lambda = \lambda^1 = 1$ і перейти до границі при $\nu_1^1 \rightarrow \nu_2^1 \rightarrow 1$, $s_1^1 \rightarrow s_2^1 \rightarrow 1$, $k_1^1 \rightarrow k_2^1 \rightarrow 1$; виразити модулі пружності A_{ij}^1 і коефіцієнти деформації a_{ij}^1 через пружні постійні ізотропного тіла [4].

Розглянуто числовий приклад для трансверсально-ізотропного матеріалу – магнію.

Оскільки система (24) квазірегулярна при будь-яких співвідношеннях теплофізичних характеристик, то розв'язок їх знаходимо методом редукції із усічених систем. При цьому розв'язували систему 30-ти лінійних алгебраїчних рівнянь з 30-ма невідомими. На рис. 1 і рис. 2 зображено графіки розподілу температури $\alpha_1 = \frac{T(\rho)}{T_0}$ і

температурної складової нормального напруження $\alpha_2 = \frac{\sigma_z^{T^1}(\rho, 0)}{\alpha_{T^1} T_0 \Delta_2}$ уздовж безрозмірної

координати ρ при $\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} = 0, 1$; $l = 2$ та різних значеннях контактної провідності $h_0^1 = \frac{h_0 R}{\lambda_z}$.

Пунктирною лінією зображено графіки для ізотропних матеріалів.

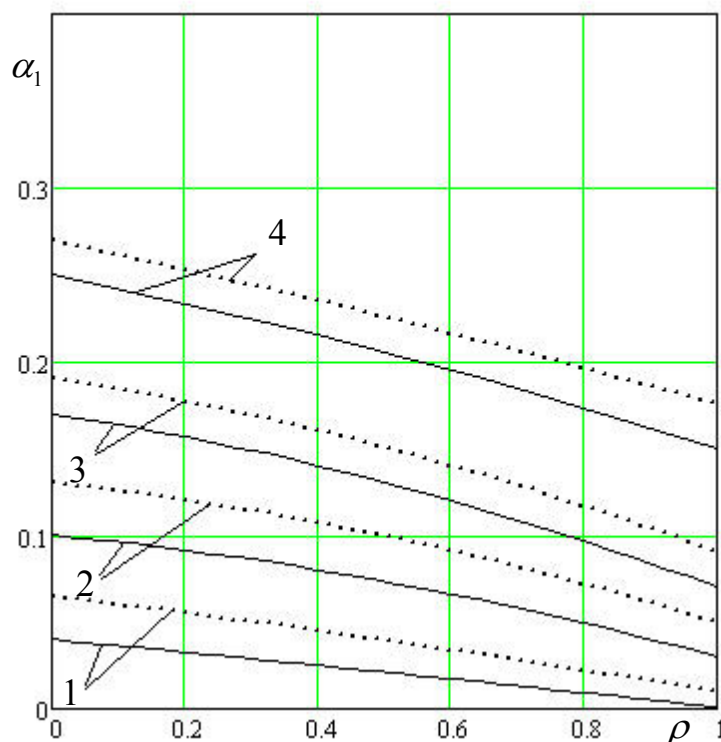


Рисунок 1 – Розподіл температури для різних значень контактної провідності:
крива 1 – $h_0^1 = 0,1$; 2 – $h_0^1 = 1$; 3 – $h_0^1 = 5$; 4 – $h_0^1 = \infty$

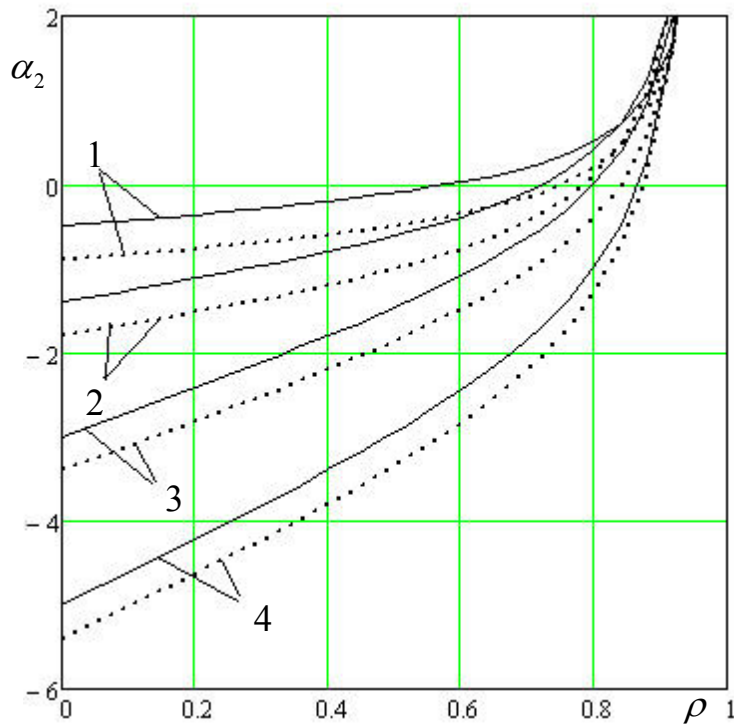


Рисунок 2 – Розподіл температурної складової контактних нормальних напружень для різних значень контактної провідності:

крива 1 – $h_0^1 = 0,1$; 2 – $h_0^1 = 1$; 3 – $h_0^1 = 5$; 4 – $h_0^1 = \infty$

Висновок. Застосовуючи інтегральне перетворення Ганкеля та метод Фур'є, розв'язок температурної задачі зведено до визначення деяких постійних із нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, через які знаходимо температурні поля та їхні градієнти в будь-якій точці циліндра і півпростору, а також нормальні напруження у зоні контакту.

Результати розрахунків для магнію показують, що у випадку трансверсально-ізотропних матеріалів, порівняно з ізотропними, температура в зоні контакту зменшується, а температурна складова контактних напружень збільшується у межах 4-8%.

Дослідження показують, що контактна провідність h_0^1 значно впливає на розподіл температури і температурної складової нормального напруження у зоні контакту системи тіл циліндр-півпростір.

Література

1. Грилицкий Д.В. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости / Д. Грилицкий, Я. Кизыма. – Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981. – 135с.
2. Окрепкий Б.С. Осесимметрична температурна задача для системи тіл циліндр-півпростір при неідеальному тепловому контакті / Богдан Окрепкий, Марія Шелестовська // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – №3. – С. 23 – 27.
3. Окрепкий Б.С. Тиск циліндричного кругового штампa на пружний півпростір з врахуванням неідеального теплового контакту / Богдан Окрепкий, Марія Шелестовська // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2006. – №3. – С. 26 – 33.
4. Singh A. Axisymmetrical thermal stresses in transversely isotropic bodies. – Arch. Mech. Stos., 1966. – v. 12, N 3.
5. Singh A. Stress distributions within solids of revolution. – ZAMM, 1959. – Bd. 39, H. 12.
6. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропного тела / Лехницький С.Г. – М.: Наука, 1977. – 348с.
7. Уиттекер Э.Т. Курс современного анализа / Э. Уиттекер, Д. Ватсон. – М.: Физматгиз, 1963. – 343с.

Одержано 25.12.2009 р.