

Академік НАН України **А. М. Самойленко, Н. Г. Хома,
С. Г. Хома-Могильська**

Властивості 2π -періодичного розв'язку крайової задачі

Вперше у спеціально виділеному класі функцій побудовано оператор, який переводить клас 2π -періодичних функцій самого в себе, і вивчено його властивості.

У попередній роботі [1] нами визначено оператор P , який переводить клас функцій $f(x, t) \in Q_{2\pi \times 2\pi}^- \cap C(\mathbb{R}^2)$, де $Q_{2\pi \times 2\pi}^- = \{f: f(x, t) = -f(-x, t) = f(x + 2\pi, t) = f(x, t + 2\pi)\}$, у цей же клас.

У даній роботі доведемо, якому диференціальному рівнянню задовольняє функція

$$\begin{aligned} v(x, t) &= (PF[v, v_t, v_x])(x, t) \equiv \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \left(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} F[v, v_t, v_x](\xi, \tau) d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_{x-t+s}^{x+t-s} F[v, v_t, v_x](\xi, s) d\xi \right) d\tau = \\ &= z(x, t) + (P_0 F[v, v_t, v_x])(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

і деякі допоміжні оцінки, необхідні для доведення теореми існування розв'язку квазілінійної крайової 2π -періодичної задачі.

Теорема. *Нехай для кожної функції $v(x, t) \in Q_{2\pi \times 2\pi}^- \cap C^2(\mathbb{R}^2)$ функція $F[v, v_t, v_x](x, t) = f(x, t, v(x, t), v_t(x, t), v_x(x, t)) \in Q_{2\pi \times 2\pi}^- \cap C^1(\mathbb{R}^2)$. Тоді функція $v(x, t) = (PF[v, v_t, v_x])(x, t)$, визначена формулою (1), є 2π -періодичним розв'язком такої крайової періодичної задачі:*

$$\begin{aligned} v_{tt} - v_{xx} &= F[v, v_t, v_x](x, t) - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x + t - s, s) + F[v, v_t, v_x](x - t + s, s)) ds, \end{aligned} \quad (2)$$

$$v(0, t) = v(\pi, t) = 0, \quad (3)$$

$$v(x, t + 2\pi) = v(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2. \quad (4)$$

Доведення. Те, що функція $v(x, t)$, визначена інтегральним рівнянням (1), задовольняє умови (3) і (4), доведено у роботі [1]. Тепер доведемо виконання рівності (2). На основі визначення функції $v(x, t)$ обчислимо похідні другого порядку v_{tt} і v_{xx} . Маємо

$$v_t(x, t) = \frac{1}{2}(\mu(t+x) - \mu(t-x)) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_{x-t+s}^{x+t-s} F[v, v_t, v_x](\xi, s) d\xi +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^t \left(F[v, v_t, v_x](x+t-\tau, \tau) + F[v, v_t, v_x](x-t+\tau, \tau) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x+t-s, s) + F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)) ds \right) d\tau; \\
v_{tt}(x, t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu(t+x)}{\partial(t+x)} - \frac{\partial \mu(t-x)}{\partial(t-x)} \right) - \\
& - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x+t-s, s) + F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)) ds + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\partial F[v, v_t, v_x](x+t-\tau, \tau)}{\partial(x+t-\tau)} - \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x-t+\tau, \tau)}{\partial(x-t+\tau)} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F[v, v_t, v_x](x+t-s, s)}{\partial(x+t-s)} - \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)}{\partial(x-t+s)} \right) ds \right) d\tau + \\
& + \frac{1}{2} (F[v, v_t, v_x](x, t) + F[v, v_t, v_x](x, t)) - \\
& - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x+t-s, s) + F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)) ds
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
v_{tt}(x, t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu(t+x)}{\partial(t+x)} - \frac{\partial \mu(t-x)}{\partial(t-x)} \right) + F[v, v_t, v_x](x, t) - \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x+t-s, s) + F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)) ds + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\partial F[v, v_t, v_x](x+t-\tau, \tau)}{\partial(x+t-\tau)} - \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x-t+\tau, \tau)}{\partial(x-t+\tau)} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F[v, v_t, v_x](x+t-s, s)}{\partial(x+t-s)} - \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)}{\partial(x-t+s)} \right) ds \right) d\tau; \tag{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_x(x, t) &= \frac{1}{2} (\mu(t+x) + \mu(t-x)) + \frac{1}{2} \int_0^t \left(F[v, v_t, v_x](x+t-\tau, \tau) - F[v, v_t, v_x](x-t+\tau, \tau) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x+t-s, s) - F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)) ds \right) d\tau;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{xx}(x, t) = & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu(t+x)}{\partial(t+x)} - \frac{\partial \mu(t-x)}{\partial(t-x)} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\partial F[v, v_t, v_x](x+t-\tau, \tau)}{\partial(x+t-\tau)} - \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x-t+\tau, \tau)}{\partial(x-t+\tau)} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F[v, v_t, v_x](x+t-s, s)}{\partial(x+t-s)} - \frac{\partial F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)}{\partial(x-t+s)} \right) ds \right) d\tau.
\end{aligned} \tag{6}$$

На основі рівностей (5) і (6) знаходимо

$$v_{tt} - v_{xx} = F[v, v_t, v_x](x, t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F[v, v_t, v_x](x+t-s, s) + F[v, v_t, v_x](x-t+s, s)) ds,$$

що треба було довести.

Тепер доведемо ряд оцінок, потрібних при доведенні теореми існування розв'язку крайової періодичної задачі (2)–(4).

Лема 1. Нехай $f(x, t)$ — неперервна на прямокутнику $\overline{\Pi}_{2\pi} = \{0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq t \leq 2\pi\}$ функція. Тоді для ядра

$$K(x, t, \tau) = \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi \tag{7}$$

оператора Даламбера

$$(\tilde{P}_0 f)(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi \tag{8}$$

справедлива оцінка

$$|K(x, t, \tau)| \leq M_0 |t - \tau|,$$

$$\text{де } M_0 = \max_{(x, t) \in \overline{\Pi}_{2\pi}} |f(x, t)|.$$

Лема 2. Нехай $f(x, t)$ — неперервна на прямокутнику $\overline{\Pi}_{2\pi}$ функція. Тоді

$$\left| \int_0^t \left(K(x, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau \right| \leq \frac{1}{2} (2\pi t - t^2) M_0 \equiv \frac{M_0}{2} \beta_1(t),$$

де $\beta_1(t) = 2\pi t - t^2$, причому $\beta_1(t) \leq \pi^2 \forall t \in [0, 2\pi]$.

Доведення. Враховуючи твердження леми 1, маємо

$$\left| \int_0^t \left(K(x, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_0^t \left(K(x, t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^t K(x, t, s) ds - \frac{1}{2\pi} \int_t^{2\pi} K(x, t, s) ds \right) d\tau \right| = \\
&= \left| \int_0^t K(x, t, \tau) d\tau - \frac{t}{2\pi} \int_0^t K(x, t, s) ds - \frac{t}{2\pi} \int_t^{2\pi} K(x, t, s) ds \right| \leq \\
&\leq \left| \left(1 - \frac{t}{2\pi} \right) \int_0^t |K(x, t, \tau)| d\tau \right| + \left| \frac{t}{2\pi} \int_t^{2\pi} |K(x, t, s)| ds \right| \leq \\
&\leq \left(1 - \frac{t}{2\pi} \right) M_0 \int_0^t |t - \tau| d\tau + \left| \frac{M_0 t}{2\pi} \int_t^{2\pi} |t - s| ds \right| = \\
&= \frac{M_0}{2} \left(1 - \frac{t}{2\pi} \right) \left(-(t - \tau)^2 \right) \Big|_0^t + \frac{M_0 t}{4\pi} (s - t)^2 \Big|_t^{2\pi} = \frac{M_0}{2} \left(1 - \frac{t}{2\pi} \right) t^2 + \frac{M_0 t}{4\pi} (2\pi - t)^2 = \\
&= \frac{M_0}{4\pi} ((2\pi - t)t^2 + t(2\pi - t)^2) = \frac{M_0}{4\pi} (2\pi t^2 - t^3 + 4\pi^2 t - 4\pi t^2 + t^3) = \\
&= \frac{M_0}{4\pi} (4\pi^2 t - 2\pi t^2) = \frac{M_0}{2} (2\pi t - t^2) \equiv \frac{M_0}{2} \beta_1(t),
\end{aligned}$$

що треба було довести.

1. Самойленко А. М., Хома-Могильська С. Г. Аналітичний метод відшукування 2π -періодичних розв'язків гіперболічних рівнянь другого порядку // Доп. НАН України. – 2010. – № 4. – С. 25–29.

Інститут математики НАН України, Київ
Тернопільський національний економічний університет

Надійшло до редакції 23.02.2010

Academician of the NAS of Ukraine **A. M. Samoilenko, N. H. Khoma,**
S. H. Khoma-Mohylska

Properties of a 2π -periodic solution of the boundary-value problem

For the first time in a special function class, an operator which transforms a class of 2π -periodic functions into itself is constructed. Properties of this operator are studied.